ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

HERAUSGEGEBEN VON PROFESSOR R. VON MISES, BERLIN

Unter Mitwirkung von A. FÖPPL-München, G. HAMEL-Charlottenburg, R. MOLLIER-Dresden, H. MÜLLER-BRESLAU-Charlottenburg, L. PRANDTL-Göttingen und R. RÜDENBERG-Berlin

: Band 4 : April 1924 :: Heft 2 :: Seite 85 bis 192

Dem ersten internationalen Kongreß für Mechanik in Delft überreicht von Verlag und Schriftleitung

Mit einem Bildnis von Felix Klein

INHALT:



V·D·I-VERLAG G.M.B.H., BERLIN SW 19

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 4 **Ende April 1924** **Heft 2**

Inhalt:

Das vorliegende Heft, das zwanzigste seit Bestehen der Zeitschrift, ist zwei festlichen Anlässen gewidmet.

Am 25. April wird Felix Klein in Göttingen fünfundsiebzig Jahre alt. Auf den folgenden Seiten ist der Versuch gemacht zu zeigen, was die Wirksamkeit dieses großen Mathematikers, Lehrers und Organisators für das von uns vertretene Arbeitsgebiet bedeutet hat und bedeutet. Indem wir ihm in Dankbarkeit und Verehrung dies Heft überreichen, sprechen wir den Wunsch aus, daß es ihm noch lange vergönnt sein möchte, den Ertrag seines arbeitsreichen Lebens sich entfalten zu sehen.

In den Tagen vom 22. bis zum 28. April findet in Delft, dank der Initiative unserer holländischen Kollegen, der erste internationale Kongreß für angewandte Mechanik statt. Wir begrüßen, als die einzige Fachzeitschrift dieses Gebietes, den Kongreß und freuen uns, ihm ein Heft vorlegen zu können, das zwölf Beiträge zu allen Teilen der Mechanik enthält, herrührend von Autoren aus Holland und Deutschland, Oesterreich, Rußland, aus der Türkei und Finnland, Ungarn und der Tschechoslowakei, aus Argentinien und Japan. Wenn in Deutschland — nicht zuletzt in Auswirkung der weit vorausblickenden Tätigkeit Kleins — die Mechanik besonders intensive Pflege gefunden hat, so bleiben wir uns doch bewußt, daß der wünschenswerte Ausbau der Wissenschaft nur durch gemeinsame Arbeit aller Nationen herbeigeführt werden kann. In diesem Sinne soll unsere Zeitschrift auch international sein: Sie wird nach wie vor jedem das Wort geben, der etwas für die Wissenschaft Förderliches zu sagen hat, wie sie auch in ihren Berichten und Referaten die Literatur aller Nationen berücksichtigt und sich an einen Leserkreis in allen Ländern wendet.

Dem Kongreß wünschen wir vollen Erfolg, sowohl in seiner wissenschaftlichen Arbeit wie in der Anbahnung und festen Begründung weiterer Gemeinsamkeit zwischen den Forschern.

Berlin, im April 1924. **Die Schriftleitung.**

Felix Klein.

Zu seinem 75. Geburtstag am 25. April 1924.

Wenn die deutschen Gelehrten der letzten Jahrzehnte nach Klopstocks altem, phantastischem Plan sich zur »Gelehrten-Republik« zusammengeschlossen hätten, sicherlich wäre Felix Klein zu einem der »Aldermänner« gewählt worden: vorgeschlagen von der Zunft der Mathematiker hätte er die begeisterte Zustimmung der übrigen gefunden, vor allem bei der Zunft der Naturforscher und bei jenen, die man heute Ingenieure nennt, die »nicht abhandeln, auch nicht beschreiben nach Art der Abhandlung, sondern hervorbringen und darstellen«. Zwei Eigenschaften sind es, welche die repräsentative Erscheinung Kleins kennzeichnen und die man an die Spitze jeder Betrachtung stellen muß, die einen Einblick in das ungewöhnliche Wesen dieses Mannes vermitteln soll. Einmal die, daß für ihn niemals die Grenzen seines Faches auch die Grenzen seines Gesichtskreises waren; daß er es verstanden hat, als Mathematiker einen Standpunkt zu gewinnen, der über das Gebiet der Mathematik hinaus weite Bereiche von Wissenschaft und Leben richtig zu überschauen gestattete. Und damit in Zusammenhang: daß von der im heutigen Wissenschaftsbetrieb schon zur Regel gewordenen Inkongruenz zwischen Leistung und Persönlichkeit hier nie die Rede sein konnte; in vollem Einklang sehen wir Wert und Würde des von ihm geschaffenen Werkes mit dem Wert und der Bedeutung des Menschen, der dahinter steht.

Eine auch nur einigermaßen vollständige Darstellung dessen, was Klein in der Mathematik geleistet hat, kann an dieser Stelle nicht gegeben werden. Soweit dies überhaupt ohne Voraussetzung genauer Fachkenntnisse geschehen kann, ist es in dem Klein-Heft der »Naturwissenschaften«, das aus Anlaß des siebzigsten Geburtstages vor fünf Jahren erschienen ist, versucht worden. Hier müssen nun einige wenige Andeutungen genügen. Der junge Student zu Ende der Sechziger-Jahre wurde zunächst von geometrischen Interessen in Anspruch genommen. Um jene Zeit war der Aufgabenkreis der Geometrie, die erst zu Beginn des neunzehnten Jahrhunderts wieder in den Vordergrund der mathematischen Bestrebungen getreten war, durch die Arbeiten von Clebsch, Cayley, Cremona u. a., vor allem auch durch die geistvollen Entdeckungen Plückers, dessen Assistent Klein 1866 wurde, in hohem Maße erweitert worden. Eine ganze Fülle neuer geometrischer Theorien tauchte auf, und unter ihnen ward namentlich die sog. Liniengeometrie, in der an Stelle des Punktes die gerade Linie als Raumelement angesehen wird, das bevorzugte und mit größtem Erfolg ausgestaltete Arbeitsgebiet Kleins. Zu tiefer liegenden Forschungen führten ihn die eben erst zur Entwicklung kommenden Gedanken der Nichteuklidischen Geometrie, d. h. derjenigen geometrischen Untersuchungen, in denen man die Voraussetzungen über das durch die unmittelbare Raumanschauung gebotene Maß hinaus wesentlich erweitert. Ein dritter, überaus fruchtbarer Ideenkreis, die Anwendung des Begriffes der infinitesimalen Transformationen, stammte von dem Norweger Lie, mit dem sich Klein 1870 zu gemeinsamer Arbeit verband. Als Klein kaum dreiundzwanzigjährig die ordentliche Professur der Mathematik in Erlangen übernahm, hatte er bereits in mehr als zwanzig wertvollen Abhandlungen die eben genannten geometrischen Gebiete nach allen Seiten durchforscht, sie in fruchtbarster Weise mit einander in Verbindung gebracht und eine solche Menge neuer Fragestellungen aufgedeckt, daß noch mehrere Jahrzehnte aus diesen Arbeiten ihre Anregungen schöpfen konnten. Aber alle diese Einzelleistungen werden in Schatten gestellt durch die Bedeutung der unter dem Namen des »Erlanger-Programms« bekannten Antrittsrede von 1872[2]), in der es Klein in genialem Wurf gelang, alle scheinbar so weit auseinander liegenden geometrischen Theorien unter einen gemeinsamen Gesichtspunkt zu bringen, ein klares, übersichtliches und durchgreifendes Einteilungsprinzip für die Geometrie in dem Begriff der Transformationsgruppe zu finden und damit ein für allemal den Rahmen zu schaffen, in den sich zwanglos jede denkbare geometrische Problemstellung einfügen läßt. Die Tragweite des Erlanger Programms wird vielleicht

[1]) Die Naturwissenschaften, Bd. 7, Heft 17 (Berlin, J. Springer).

[2]) Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, Erlangen 1872. Wiederabgedruckt in Mathem. Annalen 43, 1893 und in Bd. I von Felix Klein, Gesammelte mathem. Abhandl., Berlin 1921 bis 23. Vergl. auch W. Blaschke, diese Zeitschr. 1, 1921, 332—334.



F. Klein

Felix Klein.

Zu seinem 75. Geburtstag am 25. April 1924.

Wenn die deutschen Gelehrten der letzten Jahrzehnte nach Klopstocks altem, phantastischem Plan sich zur »Gelehrten-Republik« zusammengeschlossen hätten, sicherlich wäre Felix Klein zu einem der »Aldermänner« gewählt worden: vorgeschlagen von der Zunft der Mathematiker hätte er die begeisterte Zustimmung der übrigen gefunden, vor allem bei der Zunft der Naturforscher und bei jenen, die man heute Ingenieure nennt, die »nicht abhandeln, auch nicht beschreiben nach Art der Abhandlung, sondern hervorbringen und darstellen«. Zwei Eigenschaften sind es, welche die repräsentative Erscheinung Kleins kennzeichnen und die man an die Spitze jeder Betrachtung stellen muß, die einen Einblick in das ungewöhnliche Wesen dieses Mannes vermitteln soll. Einmal die, daß für ihn niemals die Grenzen seines Faches auch die Grenzen seines Gesichtskreises waren; daß er es verstanden hat, als Mathematiker einen Standpunkt zu gewinnen, der über das Gebiet der Mathematik hinaus weite Bereiche von Wissenschaft und Leben richtig zu überschauen gestattete. Und damit in Zusammenhang: daß von der im heutigen Wissenschaftsbetrieb schon zur Regel gewordenen Inkongruenz zwischen Leistung und Persönlichkeit hier nie die Rede sein konnte; in vollem Einklang sehen wir Wert und Würde des von ihm geschaffenen Werkes mit dem Wert und der Bedeutung des Menschen, der dahinter steht.

Eine auch nur einigermaßen vollständige Darstellung dessen, was Klein in der Mathematik geleistet hat, kann an dieser Stelle nicht gegeben werden. Soweit dies überhaupt ohne Voraussetzung genauer Fachkenntnisse geschehen kann, ist es in dem Klein-Heft der »Naturwissenschaften«, das aus Anlaß des siebzigsten Geburtstages vor fünf Jahren erschienen ist, versucht worden. Hier müssen nun einige wenige Andeutungen genügen. Der junge Student zu Ende der Sechziger-Jahre wurde zunächst von geometrischen Interessen in Anspruch genommen. Um jene Zeit war der Aufgabenkreis der Geometrie, die erst zu Beginn des neunzehnten Jahrhunderts wieder in den Vordergrund der mathematischen Bestrebungen getreten war, durch die Arbeiten von Clebsch, Cayley, Cremona u. a., vor allem auch durch die geistvollen Entdeckungen Plückers, dessen Assistent Klein 1866 wurde, in hohem Maße erweitert worden. Eine ganze Fülle neuer geometrischer Theorien tauchte auf, und unter ihnen ward namentlich die sog. Liniengeometrie, in der an Stelle des Punktes die gerade Linie als Raumelement angesehen wird, das bevorzugte und mit größtem Erfolg ausgestaltete Arbeitsgebiet Kleins. Zu tiefer liegenden Forschungen führten ihn die eben erst zur Entwicklung kommenden Gedanken der Nichteuklidischen Geometrie, d. h. derjenigen geometrischen Untersuchungen, in denen man die Voraussetzungen über das durch die unmittelbare Raumanschauung gebotene Maß hinaus wesentlich erweitert. Ein dritter, überaus fruchtbarer Ideenkreis, die Anwendung des Begriffes der infinitesimalen Transformationen, stammte von dem Norweger Lie, mit dem sich Klein 1870 zu gemeinsamer Arbeit verband. Als Klein kaum dreiundzwanzigjährig die ordentliche Professur der Mathematik in Erlangen übernahm, hatte er bereits in mehr als zwanzig wertvollen Abhandlungen die eben genannten geometrischen Gebiete nach allen Seiten durchforscht, sie in fruchtbarster Weise mit einander in Verbindung gebracht und eine solche Menge neuer Fragestellungen aufgedeckt, daß noch mehrere Jahrzehnte aus diesen Arbeiten ihre Anregungen schöpfen konnten. Aber alle diese Einzelleistungen werden in Schatten gestellt durch die Bedeutung der unter dem Namen des »Erlanger-Programms« bekannten Antrittsrede von 1872[2]), in der es Klein in genialem Wurf gelang, alle scheinbar so weit auseinander liegenden geometrischen Theorien unter einen gemeinsamen Gesichtspunkt zu bringen, ein klares, übersichtliches und durchgreifendes Einteilungsprinzip für die Geometrie in dem Begriff der Transformationsgruppe zu finden und damit ein für allemal den Rahmen zu schaffen, in den sich zwanglos jede denkbare geometrische Problemstellung einfügen läßt. Die Tragweite des Erlanger Programms wird vielleicht

[1]) Die Naturwissenschaften, Bd. 7, Heft 17 (Berlin, J. Springer).

[2]) Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, Erlangen 1872. Wiederabgedruckt in Mathem. Annalen 43, 1893 und in Bd. I von Felix Klein, Gesammelte mathem. Abhandl., Berlin 1921 bis 23. Vergl. auch W. Blaschke, diese Zeitschr. 1, 1921, 332—334.



F. Klein

am
sic
Re
Ze
Ju
för

Ric
neu
knü
Fu
ver
Fu
ged
ein
ent
in
Ric
mit
und
Vo
lag
Sch
der
Kl
die
Ele
ste
die
um
un
ge
Le
Id
er,
zip
zu
ge

ur
le
de
di
sc
de
au
Be
tia
Os
ni
ge
Ar
Te
fö

G

W

am besten dadurch gekennzeichnet, daß sich von ihm aus besonders aufklärende Einsichten in den mathematischen Kern der vierzig Jahre später entstandenen allgemeinen Relativitätstheorie ergeben. Klein selbst hat in mehreren Abhandlungen der allerletzten Zeit zu diesen Fragen das Wort genommen und damit, an den schönsten Erfolg seiner Jugendjahre wieder anknüpfend, in das heute aktuellste Gebiet mathematischer Forschung fördernd eingegriffen[1]).

So reich und fruchtbringend aber auch die Forschertätigkeit in geometrischer Richtung war, sie bedeutet nur einen geringen Teil von dem, was die Mathematik des neunzehnten Jahrhunderts Felix Klein verdankt. Seine kraftvollsten Schöpfungen knüpfen an die durchgreifende Wendung an, die Riemann in den Fünfziger Jahren der Funktionentheorie gegeben hatte. Im Gegensatz zu der von Cauchy und Weierstraß vertretenen rein analytischen Betrachtungsweise war durch Riemann die Lehre von den Funktionen einer komplexen Veränderlichen in engsten Zusammenhang mit anschaulichen geometrischen Gestaltungen gebracht worden. Klein, zu dessen ausgeprägtester Eigenart eine außerordentliche Begabung für geometrisches, aus unmittelbarer Raumanschauung entspringendes Denken gehört, nahm schon als Bonner Student die Ideen Riemanns in sich auf, zunächst nur seiner einmal gefaßten Absicht folgend »nach und nach alle Richtungen der Mathematik kennen zu lernen«. Bald aber wußte er sich dieser Hilfsmittel in meisterhafter Weise zu bedienen, um die Theorie der algebraischen Kurven und der damit zusammenhängenden Integrale algebraischer Funktionen zu durchforschen. Von da kam er immer tiefer in die geometrische Funktionentheorie hinein, deren Grundlagen, von ihm in wesentlichen Punkten ausgestaltet, er in einer kleinen 1882 erschienenen Schrift[2]) in klarer und leichtflüssiger Form dargestellt hat. Gerade wer vom Standpunkt der Anwendungen aus sich mit diesem Gegenstand beschäftigt, wird mit Vorteil das Kleinsche Buch zur Hand nehmen, das ausdrücklich die physikalischen Gesichtspunkte, die Deutung der konformen Abbildung als stationäre Strömung von Flüssigkeit oder Elektrizität, an die Spitze stellt und immer wieder die aus den physikalischen Vorstellungen fließende anschauliche Schlußweise zu Hilfe nimmt. Natürlich ruht nicht auf dieser, mehr pädagogisch zu wertenden Arbeit das Hauptgewicht von Kleins Verdiensten um die Funktionentheorie, sondern in den umfangreichen Produktionen über elliptische und Abelsche Funktionen und die von ihm im Verein mit H. Poincaré ganz neu geschaffene Theorie der automorphen Funktionen. Auch die höhere Algebra, die Lehre von den Gleichungen und Substitutionsgruppen erfüllte Klein mit neuen Ideen, die seiner anschaulich-bildhaften Denkweise entstammen. Ueberall vermochte er, mit weitem Blick und tiefer Perspektive, scheinbar weit auseinanderliegende Disziplinen zu einer höheren Einheit zu vereinigen und daraus fruchtbarste Ergebnisse zu gewinnen. Auf diese Dinge kann hier, selbst nicht andeutungsweise, näher eingegangen werden.

Das lebhafte Interesse, das Klein von allem Anfang an den physikalischen und technischen Wissenschaften entgegenbrachte — galten doch seine ersten Vorlesungen, die er als Göttinger Privatdozent hielt, der theoretischen Optik und dem Prinzip der Erhaltung der Energie — lenkte seine reiche Arbeitskraft gelegentlich auch nach dieser Richtung. Er selbst spricht sich dahin aus, daß er ursprünglich nur die verschiedenen Gebiete der Mathematik »assimilieren« wollte, um sich dann, so ausgerüstet, der physikalischen Forschung zuwenden zu können. Wenn freilich dazu die sonst so ausgebreitete Tätigkeit nur wenig Raum ließ, verdanken wir ihm doch manche wertvolle Beiträge zur angewandten Mathematik. Ein guter Teil der Arbeiten über lineare Differentialgleichungen ist hierher zu rechnen; sie beschäftigen sich hauptsächlich mit den sog. Oszillationstheoremen, die für die Probleme der Stabilität und der Eigenfrequenzen mechanischer (und anderer) Systeme entscheidend sind. Einige Abhandlungen sind Fragen der geometrischen Optik, der Theorie des Strahlenganges in optischen Instrumenten, gewidmet. Am weitesten in die Anwendungsgebiete vorgedrungen ist aber Klein in den verschiedenen Teilen der Mechanik. Es gelang ihm, die Kinetik des starren Körpers mannigfach zu fördern, indem er an die damals in Deutschland fast unbekannten englischen Arbeiten

[1]) Gesamm. mathem. Abh. Bd. I, S. 533—612. Siehe besonders den Vortrag: Ueber die geometrischen Grundlagen der Lorentzgruppe, zuerst erschienen im Jahresber. d. deutsch. Math. Verein. 19, 1910.

[2]) Ueber Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale. Leipzig 1882. Wiederabgedruckt in Bd. III der Gesamm. mathem. Abhandl.

anknüpfte[1]), und er befreite damit zugleich die gesamte Mechanik von der Enge der Auffassung, in die sie bei uns durch eine stark ins Formale gehende analytische Richtung geraten war; in ausgesprochenem Gegensatz zu dieser Richtung suchte er die gänzlich verloren gewesene Verbindung mit der »technischen Mechanik«, d. h. mit der Lösung unmittelbarer, durch die konkrete Wirklichkeit gegebener Probleme, wieder herzustellen. Das aus Göttinger Vorlesungen hervorgegangene Lehrbuch von Klein und Sommerfeld über die Theorie des starren Körpers[2]) greift in seinem letzten Teil mutig in die Probleme der Technik ein, behandelt den Schiffs- und Kompaß-Kreisel, die Kreiselwirkung bei Fahrzeugen u.s.f. Gemeinsam mit K. Wieghardt veröffentlichte Klein eine Theorie der Stabspannungen in ebenen Fachwerken[3]), die auf einer geistvollen Kombination der Maxwellschen reziproken Figuren mit der Airyschen Spannungsfunktion beruht, und die ihre Fruchtbarkeit für die Probleme der Baustatik bis in die letzte Zeit bewiesen hat.

Den selbständigen wissenschaftlichen Leistungen zunächststellen muß man die Tätigkeit Kleins als Herausgeber, Leiter und Organisator der »Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen«, des großartigsten literarischen Unternehmens, das je im Bereiche der exakten Wissenschaften eingeleitet wurde. Nur wer selbst als Forscher so zahlreiche Gebiete durchwandert, Weitblick und Uebersicht über die Nachbarwissenschaften erworben hatte, von vornherein aber Großzügigkeit und instinktive Einsicht in die Bedingungen wissenschaftlichen Schaffens besaß, konnte sich an einen solchen Plan heranwagen. Mehr als zweihundert Mitarbeiter, zumteil die hervorragendsten Vertreter ihrer Spezialfächer, alle aber Glieder der Gelehrtengilde, jener Klasse von Menschen, die sich am schwersten organisieren und zu Gemeinschaftsarbeit gewinnen läßt, alle die vielfach widerstrebenden Köpfe wußte der überragende Wille Kleins der einen Sache dienstbar zu machen. In drei Hauptteilen, Arithmetik und Algebra — Analysis — Geometrie, etwa zehn Bände umfassend, werden hier zunächst die Einzelgebiete der »reinen« Mathematik in rund hundert Referaten dargestellt, und zwar die Ergebnisse im Zusammenhang mit ihrer geschichtlichen Entwicklung, ohne ausgeführte Beweise. Den größten Nachdruck legte jedoch Klein auf die drei weiteren Hauptteile, die den Anwendungen gewidmet sind, der erste der Mechanik, der zweite der Physik, der dritte der Astronomie, Geodäsie und Geophysik. Die Encyklopädie wurde für Klein das Hauptinstrument zur Verfolgung seines Zieles, die rein mathematische Forschung in lebendige Wechselwirkung mit ihren Anwendungsgebieten zu bringen, ein Bestreben, das merkwürdig wenig Verständnis und viel Anfeindung auf der einen wie auf der anderen Seite fand. Vor allem nahm sich Klein des Mechanik-Teiles an, dessen Redaktion er sich selbst vorbehielt, und der unter allen Teilen der Encyklopädie die geschlossenste Form und den gleichförmigsten Aufbau besitzt. Dieser heute fast vollendete, vier Bände umfassende Abschnitt des Gesamtwerkes berührt sich nach Ziel und Inhalt so eng mit den Bestrebungen unserer Zeitschrift, daß einige nähere Angaben hier am Platze sein werden[4]). Nach einem einleitenden Bericht über die Prinzipien der Mechanik wird zunächst die Mechanik der Punkte und starren Körper in drei Stufen behandelt. Die erste umfaßt die mehr geometrisch gerichteten Theorien, darunter die Kinematik und die graphische Statik der statisch bestimmten Systeme; die zweite die Anwendungen unter Berücksichtigung der störenden Einflüsse, nämlich die Mechanik der physikalischen Apparate, die Mechanik der Lebewesen, die Aufgaben, zu denen Spiele und Sport Veranlassung geben, und in ausführlicherer Darstellung die dynamischen Probleme der Maschinentechnik; die dritte endlich, der einzige noch nicht vollendete Unterabschnitt, die allgemeineren analytischen Methoden. Es folgt ein »Hydrodynamik« genannter Hauptabschnitt, der mit zwei Berichten über die theoretische Hydromechanik einsetzt, dann in Einzelaufsätzen die flugtechnische Aerodynamik, die Ballistik,

---

[1]) Vor allem auch durch die Uebernahme des von Sir Robert Ball herrührenden Begriffes der »Schraube« oder Dyname. Zeitschr. f. Math. u. Physik 47, 1902. = Ges. Abhandl. I, S. 503 bis 532. Vergl. a. dieses Heft, S. 155 bis 181.

[2]) F. Klein und A. Sommerfeld, Ueber die Theorie des Kreisels. In 4 Heften, Leipzig 1897—1910. Das 4., die technischen Anwendungen enthaltende Heft bearbeitet von F. Noether.

[3]) Archiv der Mathem. u. Physik, III. Reihe, Bd. 8, 1904. Wiedergedruckt in Bd. II der Gesamm. mathem. Abhandl.

[4]) Die vier Teilbände bilden ein für sich abgeschlossenes Ganze, das auch unabhängig von dem übrigen im Buchhandel ist. Der 1., 3., und 4. Teilband liegen vollständig vor, vom 2. Teilband fehlt noch der Schluß.

die allgemeine technische »Hydraulik«, die Turbinentheorie, schließlich die Theorie der Schiffsbewegung berücksichtigt. Der letzte Hauptabschnitt »Elastizität und Festigkeit« beginnt analog mit Darstellungen der Elastizitätstheorie, einschließlich der in die Akustik übergreifenden Fragen der elastischen Schwingungen, woran sich Berichte über Theorie des Erddruckes, Festigkeitsprobleme im Maschinenbau, Statik der Baukonstruktionen und physikalische Grundlagen der Festigkeitslehre anschließen. Ein letzter, mit dem Früheren nur lose zusammenhängender Bericht ist der nach der kinetischen Gastheorie hin orientierten statistischen Mechanik gewidmet. Man erkennt wohl aus diesen Andeutungen, daß hier etwas Nützliches und nichts Geringes geleistet ist; aber wer vom Boden des heutigen Entwicklungsstandes aus urteilt, wird kaum ermessen können, was die Aufstellung eines solchen Programms vor etwa dreißig Jahren und seine Durchführung in diesen Jahrzehnten bedeutete. Man sagt nicht zuviel, wenn man die außerordentliche, vom Ausland schon vielfach als vorbildlich anerkannte, Entfaltung des Studiums der Mechanik in Deutschland, die nicht zuletzt auch in der vorliegenden Zeitschrift zum Ausdruck kommt, als eine Auswirkung der weitblickenden Pläne Kleins bezeichnet, die in den Mechanikbänden der Encyklopädie ihre erste Verwirklichung gefunden haben.

Es gibt für den geistig produktiven Menschen zwei Möglichkeiten, sich mit dem ungeheuren Kontrast zwischen der Fülle und dem Umfang der vorhandenen Aufgaben und den engen Schranken der eigenen Arbeitsfähigkeit abzufinden. Man kann, dies ist der eine Weg, sich auf ein bestimmtes, nicht zu weit bemessenes Arbeitsgebiet konzentrieren und, ohne rechts oder links zu blicken, getrost darauf vertrauen, daß redliche Arbeit, an der richtigen Stelle geleistet, sich schon von selbst in das Welt-Ganze einfügen werde. Andere Naturen aber drängt es, von dem Boden, auf dem sie Fuß gefaßt haben, nach allen Seiten auszugreifen, Anschluß zu suchen, Verbindungsfäden zu knüpfen und so, bewußt und willensmäßig, die Einordnung des eigenen Schaffens zumindest in das einer weiteren Umgebung zu vollziehen. Dieser Art war die Einstellung Kleins schon in früher Jugend und daraus entsprang auch später die Hingabe, mit der er sich der Arbeit an der Encyklopädie widmete. Noch weit schärfer trat diese, sich selbst objektivierende Eigenart zutage in der Auffassung, die sich Klein von seinem Lehramt und von Unterrichtsfragen überhaupt bildete. Er sah grundsätzlich seine eigene Lehrtätigkeit als einen organischen Bestandteil des ganzen mathematischen Unterrichtsbetriebes an, den er demgemäß — zunächst an der Göttinger Universität — im Sinne seiner Bestrebungen zu beeinflussen und auszugestalten suchte. Was in dieser Richtung geleistet wurde, läßt sich in Kürze kaum aufzählen. Eine kluge, von rein sachlichen und großen Gesichtspunkten geleitete Berufungspolitik, die 1895 Hilbert, dann 1902 Minkowski, 1904 Prandtl nach Göttingen brachte, konsequente Heranziehung junger, aufstrebender Kräfte, planmäßige Fühlungnahme mit den Fachkollegen, Aufstellung eines auf weite Sicht berechneten Unterrichtsprogramms, das gab die Grundlage für die nach außen auffällig sich entfaltende Organisationstätigkeit. An Unterrichtseinrichtungen, die später in größerem oder geringerem Maße von anderen Universitäten nachgeahmt wurden, entstanden innerhalb weniger Jahre: das mathematische Lesezimmer, die Sammlung mathematischer Instrumente und Modelle, die Zeichenräume für graphische Uebungen, die Sammlung geodätischer Instrumente und das Versicherungsseminar[1]). Jede dieser durch Kleins Organisationstalent geschaffenen Anstalten ist inzwischen ihren eigenen Weg der Entwicklung gegangen und hat zu ihrem Teil dazu beigetragen, Göttingen auch äußerlich als Vorort des Mathematik-Studiums in Deutschland zu kennzeichnen; aus den anfangs bescheidenen Zeichenräumen entstand das große, heute von Runge geleitete Institut für angewandte Mathematik, von dem noch die Rede sein wird. Aber die Wirksamkeit Kleins griff noch viel weiter aus. Für ihn bildete wissenschaftliche Forschung und Heranziehung des Nachwuchses an Forschern nur eine der dem Mathematiker an der Universität gestellten Aufgaben, der zwei andere zur Seite stehen: einmal die Sorge für die zweckentsprechende Ausbildung der Lehrer und damit zugleich für den sachlichen Inhalt des Mathematik-Unterrichts an allen höheren und niederen Schulen, dann — in äußerster Konsequenz der oben gekennzeichneten Einstellung — die Pflicht zur Geltend-

[1]) Hierzu und zu dem Folgenden vergl. insbesondere die beiden Schriften von F. Klein und E. Riecke: Ueber angew. Mathem. und Physik in ihrer Bedeutung für den Unterricht an den höheren Schulen nebst Erläuterung der bezüglichen Göttinger Universitätseinrichtungen. Leipzig u. Berlin 1900; Neue Beiträge zur Frage des mathematischen und physikalischen Unterrichts an den höheren Schulen. Leipzig u. Berlin 1904.

machung der Mathematik und zur Vertretung ihrer Bedeutung innerhalb des ganzen Kulturlebens. Die führende Rolle, die Klein seit der Schulkonferenz von 1900 in der Frage der Unterrichtsreform innehatte, die vielfach neuen und durchschlagenden Ideen, mit denen er die Schulbewegung erfüllte und denen er zum großen Teil auch zu praktischem Erfolg verhalf, die außerordentliche organisatorische Leistung, durch die nicht nur für Deutschland, sondern über fast alle Kulturländer hin die auf diesem Gebiet wirkenden Kräfte zusammengefaßt wurden, das alles kann hier nicht näher dargestellt werden. Es mag genügen, an das viel zitierte Schlagwort vom »funktionalen Denken« zu erinnern, das, wenn auch einigermaßen vergröbert, die Richtung kennzeichnet, in der die Modernisierung des durch langjährige Stagnation etwas erschlafften mathematischen Schulunterrichts angestrebt wurde. Ein genaues Bild der Sachlage vor und nach dem Einsetzen der Reform liefern die von der deutschen Untergruppe der Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission, deren Schöpfer und Vorsitzender Klein war, in neun Bänden herausgegebenen Abhandlungen, Berichte und Mitteilungen [1]). Auch die allgemeiner gerichteten Bestrebungen, das Ansehen der Mathematik, die Erkenntnis von ihrem geistigen Wert und ihrem praktischen Nutzen für die Gesamtheit, zu fördern, sollten im Rahmen einer groß angelegten Publikation, der »Kultur der Gegenwart«, ihren literarischen Ausdruck finden. Die Zeitumstände haben leider die Durchführung des Unternehmens, soweit es die Mathematik betrifft, großenteils verhindert [2]). Glücklicherweise ist die von Klein mit besonderer Sorgfalt und Gründlichkeit vorbereitete Geschichte der Mathematik im neunzehnten Jahrhundert, eine Arbeit, deren Wert angesichts der Persönlichkeit des Verfassers kaum hoch genug eingeschätzt werden kann, in einer vorläufigen Fassung einem kleineren Kreise schon zugänglich gemacht und damit vor dem Untergang bewahrt. Es darf hier die Hoffnung ausgesprochen werden, daß es Kleins ungebrochener Arbeitskraft, der wir eben erst eine wundervoll abgerundete, mannigfach ergänzte Neuausgabe seiner mathematischen Abhandlungen verdanken, noch gelingen möchte, auch das historische Werk in die endgültige Form zu bringen.

Wenn jemand, dem es seine Natur zur Gewissenspflicht macht, über sein Verhältnis zu der ihn umgebenden Welt praktisch ins Reine zu kommen, von Beruf Mathematiker ist, so wird er vor die schwierigste Aufgabe gestellt durch die Frage nach den Beziehungen zwischen Mathematik und Technik. Diese Frage ist nicht zu verwechseln mit dem allgemeinen »Anwendungsproblem«, das bis zu einem gewissen Grade in jeder Wissenschaft vorliegt und in der Mathematik darin zum Ausdruck kommt, daß sich eine ganze Kette wissenschaftlicher Einstellungen aufzählen läßt, von denen jede der auf der einen Seite benachbarten gegenüber die »angewandte« darstellt [3]). Zwischen Technik und Mathematik besteht ein Wesensunterschied viel tieferer Art und wer meint, einen irgendwie wesentlichen Teil der Ingenieurtätigkeit als »angewandte Mathematik« begreifen zu können, begeht denselben Fehler, wie der, der den Beruf des Politikers als »Anwendung der Geschichte« oder den des Malers als »Anwendung der Perspektive« auffaßt. Ein gewisser Teil der mathematischen Erkenntnisse und Methoden, dessen Abgrenzung schwankend ist und der von einem bestimmten (eben dem Ingenieur-) Standpunkt aus als die »angewandte Mathematik« bezeichnet wird, bildet ein wichtiges Werkzeug, aber eben nur ein Werkzeug, in der Hand des Ingenieurs, so wie die Kenntnis der Anatomie oder der Perspektive Hilfsmittel des Malers sind. Allein die geistige Struktur der Ingenieurtätigkeit ist eine gänzlich verschiedene von der des Wissenschaftlers [4]) und so hat es seinen tiefen Grund, daß in fast allen Ländern technische Hochschulen und Universitäten selbständig und unabhängig voneinander sich entwickelt haben, mögen sie auch schließlich in eine losere oder engere Verknüpfung getreten sein. Was Felix Klein in den Neunziger-Jahren anstrebte und in der Oeffentlichkeit vertrat, war vielleicht in letzter Linie auch nur eine derartige organisatorische Verbindung, die unnötige

[1]) Erschienen Leipzig u. Berlin, 1909 bis 1917 bei Teubner.

[2]) Von dem III. Teil, 1. Abteilung: Die mathematischen Wissenschaften, erschien bisher Lieferg. 1 bis 3 (Leipzig 1912 bis 1914) enthaltend: H. E. Zeuthen, Die Mathematik im Altertum und Mittelalter; A. Voss, Die Beziehungen der Mathematik zur Kultur der Gegenwart; H. E. Timerding, Die Verbreitung mathem. Wissens und mathem. Auffassung.

[3]) Vergl. dazu die etwas eingehenderen Bemerkungen in dem Programm dieser Zeitschrift, Bd. I, 1921, S. 2.

[4]) Wer sich für die tieferliegenden psychologischen Gründe der Struktur-Unterschiede interessiert, mag darüber bei Eduard Spranger, Lebensformen, geisteswissenschaftliche Psychologie und Ethik der Persönlichkeit, 3. Aufl., Halle 1922, insbes. S. 321 ff. nachlesen.

Doppelarbeit vermeiden, persönliche Fühlungnahme erleichtern sollte. Die Ingenieure aber, durch die ganze geschichtliche Situation empfindlich geworden, sahen in seinem Vorgehen, namentlich in dem Gedanken, die »Generalstabsoffiziere der Technik« auf der Universität heranzubilden, einen Angriff auf die schwer erkämpften Rechte der Gleichstellung und fühlten wohl auch heraus, daß wenn nicht bei Klein selbst, so doch bei jenen, in deren Hände schließlich die Ausführung der Kleinschen Pläne gelangen mußte, eine Geringschätzung der Technik gegenüber der »reinen« Wissenschaft den Leitgedanken bilden könnte. So kam es, daß energischer und in der Form keineswegs berechtigter Widerstand sich in den Kreisen erhob, die die Selbständigkeit und Unversehrtheit der technischen Hochschulen gegenüber den Universitäten vertraten. Den teilweise recht heftig geführten Kampf beendete 1895 der »Aachener Friede«[1]), der festlegte, daß den technischen Hochschulen die Ingenieurausbildung bis zu den höchsten Anforderungen, einschließlich der Heranziehung des eigenen Dozenten-Nachwuchses überlassen bleiben sollte, während die ingenieurwissenschaftlichen Einrichtungen der Universitäten nur den Bedürfnissen einer genügend vielseitigen Ausbildung der Mathematiker und Physiker, vor allem der künftigen Lehrer an den höheren Schulen, anzupassen wären. Im Rahmen dieser gewiß vernünftigen Abgrenzung schuf nun Klein mit zäher Energie, unter Ueberwindung zahlloser Schwierigkeiten und Hemmnisse, allein unterstützt von dem weitblickenden Ministerialdirektor Althoff, die Reihe der Göttinger Institute, von denen einzelne Weltruf erlangt haben. Die Mittel wurden nur zum geringen Teil vom preußischen Staat, hauptsächlich durch die von Klein ins Leben gerufene »Göttinger Vereinigung«, der namhafte Industrielle unter Führung von v. Böttinger beitraten, aufgebracht. Wir müssen uns wieder mit einer bloßen Aufzählung begnügen und nennen neben dem schon erwähnten Rungeschen Institut für angewandte Mathematik das Institut für technische Physik (hauptsächlich Elektrotechnik), das Simon übertragen wurde, dann das Institut für angewandte Mechanik, das unter Prandtls Leitung steht und dem bald die erste aerodynamische Versuchsanstalt in Deutschland angegliedert wurde. Daß die beiden letztgenannten Anstalten die führende Rolle auf ihren Forschungsgebieten innehaben, gilt weit über die Grenzen Deutschlands hinaus; ein großer Teil der heute auf diesem Gebiet erfolgreichen Forscher entstammt der Göttinger Schule oder steht in engstem Zusammenhang mit ihr — ein Blick auf die Mitarbeiterliste unserer Zeitschrift läßt dies deutlich erkennen. Es kann kein Zweifel darüber bestehen, daß die Auswirkung der Aachener Beschlüsse, soweit sie die Universitäten betreffen, dank der außerordentlichen Organisations-Begabung Kleins sich fruchtbar und segensreich gestaltet hat. Die technischen Hochschulen haben erst in den letzten Jahren begonnen, auch ihrerseits die letzten Konsequenzen zu ziehen und durch die neuesten Reformen dem Studium die Bewegungsfreiheit gegeben, deren es zur Erzielung von Spitzenleistungen unbedingt bedarf; auch hier wird der Erfolg nicht ausbleiben, wenn die Mathematiker der technischen Hochschulen die großen Aufgaben, die ihnen die Ingenieurausbildung stellt, in Kleinschem Geiste erfassen, ihnen mit voller Kraft dienen und sich mehr und mehr von der Nachahmung des theoretischen, auf die Lehrerausbildung zugeschnittenen Universitätsunterrichtes lossagen werden. Für Felix Klein aber mag es nach all den Jahren unliebsamen Kampfes eine Genugtuung bilden, daß heute ein namhafter Kreis von Ingenieuren — der in der »Zeitschrift« und der »Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik« seine Vereinigungspunkte findet — sich rückhaltlos zu seinen Anschauungen bekennt und in ihm den mit intuitiver Voraussicht und fruchtbarer Gestaltungskraft begabten Führer erblickt.

Ueber Jean d'Alembert, den großen Mathematiker und Physiker des achtzehnten Jahrhunderts, der sich auf vielerlei Gebieten, weit über die Grenzen seines Faches hinaus, öffentlich betätigte, schreibt Goethe einmal: »Ihm ist sein Ruhm, als Mathematiker, niemals streitig gemacht worden, als er sich aber um des Lebens und der Gesellschaft willen vielseitig literarisch ausbildete; so nahmen die Mißgünstigen daher Anlaß, schwächere Seiten aufzusuchen und zu zeigen«. Und Goethe fährt fort: »Solche feindselige Naturen, die nur wider

[1]) Eine Vereinbarung, die auf der Hauptversamml. des Ver. deutsch. Ingen. in Aachen 1905 zwischen Klein und den Vertretern der Ingenieurwissenschaften Linde, Bach, Gutermuth, Peters, Intze, v. Borries, Mehrtens abgeschlossen wurde. Vergl. dazu Zeitschr. Ver. deutsch. Ingen. 1895, S. 1215 u. 1421; 1896 S. 103.

[2]) In den Anmerkungen zu: Rameaus Neffe, ein Dialog von Diderot. Aus dem Manuskript übersetzt und mit Anmerkungen begleitet von Goethe. Leipzig bey G. J. Göschen, 1805, S. 387.

Willen entschiedene Vorzüge anerkennen, möchten gern jeden trefflichen Mann in sein Verdienst ganz eigentlich einsperren und ihm eine vielseitige Bildung, die allein Genuß gewährt, verkümmern. Sie sagen gewöhnlich, zu seinem Ruhme habe er dieses oder jenes nicht unternehmen sollen! Als wenn man alles um des Ruhmes willen täte, als wenn die Lebensvereinigung mit ähnlich Gesinnten, durch ernste Teilnahme an dem, was sie treiben und leisten, nicht den höchsten Wert hätte .....« Man kann kaum treffendere Worte finden, wenn man die Stellung, die Felix Klein in Wissenschaft und Leben der Gegenwart einnimmt, und die Beurteilung, die sie vielfach gefunden hat, kennzeichnen will. Wir haben uns, heute viel mehr als im 18. Jahrhundert, in Deutschland stärker als in den übrigen Ländern und in der Mathematik mehr als in anderen Fächern, das Ideal des Fachgelehrten gebildet, dessen Ehrgeiz in der Hervorbringung möglichst gesteigerter fachlicher Leistungen sich erschöpft und dessen Verdienst allein nach dem Maße dieser Hervorbringung gemessen wird. Niemand fragt darnach, ob die Leistungen nicht etwa durch eine Verkümmerung des ganzen übrigen Menschen erkauft werden. Allseitige Ausbildung des Geistes oder Charakters werden als unerheblich angesehen; ein aktives Hervortreten aber in der einen oder andern Richtung wird abfällig beurteilt, von dem Maß der Leistungen »subtrahiert«. Es ist fast, als ob das böse Wort der Griechen wieder wahr werden sollte, daß man, um unter den Flötenspielern der erste zu sein, der letzte unter den Menschen sein müsse. Wer mit einem solchen Gelehrtenideal im Auge an die Beurteilung Kleins herantritt, kann ihm unmöglich gerecht werden, auch wenn er anerkennen muß, daß hier spezifische mathematische Begabung und mathematische Produktivität in einem Ausmaß vorliegt, wie es von wenigen Zeitgenossen erreicht, von ganz wenigen Heroen in der Geschichte der Mathematik übertroffen wurde. Eine Persönlichkeit von viel größerem Zuschnitt steht hier vor uns.

Denn dies ist das Charakteristische bei Klein und gibt uns erst den wahren Maßstab zu seiner Beurteilung, daß ihm das an sich schon außerordentliche mathematische Schaffen erst Grundlage und Ausgangspunkt für eine weit ausholende Wirksamkeit wurde, die — nach ihren Ergebnissen beurteilt — in letzter Linie darauf hinauslief, möglichst vielen möglichst gute Bedingungen für eigenes Schaffen zu bereiten. Dahin münden doch schließlich alle Bestrebungen organisatorischer Art, die Reform der Schulen und des Unterrichts an der Universität, die Errichtung von Instituten zur Erziehung von Forschern, die planmäßige Verbindung mit den Fachgenossen, die Bemühungen um die Encyklopädie und um die Geltendmachung der Mathematik im öffentlichen Leben. Und es ist eine alte Wahrheit, daß derartige Wirksamkeit nur dann segensreich sein kann, wenn sie auf dem Boden eigener wissenschaftlicher Produktivität erwächst: ein recht trauriges Gegenstück des in sich gekehrten, von äußerer Tätigkeit zurückgezogenen Fachgelehrten bildet der selbst unproduktive, in Ministerien, Sitzungen und Organisationen sich auslebende Geschäftsgelehrte. Was wir an Klein bewundern müssen, ist das vollkommene Gleichgewicht zwischen den verschiedenen Betätigungen, zu dem ihn seine große und reiche Natur befähigt; nicht zuletzt die eindrucksvolle persönliche Erscheinung, das ausgeglichene, in sich beruhende Wesen, die Gabe vollendeten mündlichen Vortrages und durchdringend klarer schriftlicher Darstellung, die jeden in ihren Bann ziehen. Dies alles wirkt auch zusammen, um jedem, der von irgend einer Aeußerung dieser Persönlichkeit Kenntnis nimmt, von einer wissenschaftlichen Abhandlung, einer organisatorischen Schrift, einem Vortrag oder nur einer der vielen autobiographischen Notizen in der Neuausgabe der Werke, einen reinen ästhetischen Genuß zu verschaffen, obwohl dem Urheber gewiß nichts ferner lag, als bewußt einen solchen Eindruck anzustreben. Vielleicht ist diese Art von unbeabsichtigter Wirkung das sicherste Kriterium wahrer Größe. Fassen wir aber noch einmal, zurückblickend auf die genialischen Jugendjahre und auf die fast vier Jahrzehnte reifen Schaffens in Göttingen, dies reiche und fruchtbare, hoffentlich noch lange nicht abgeschlossene Lebenswerk voll strengster Selbstzucht und konsequenter Pflichterfüllung, ins Auge, so dürfen wir uns eines Ausspruches erinnern, der dem dreiundachtzigjährigen Goethe, dem unerreichten Vorbild aller hohen Lebensführung, zugeschrieben wird: »Es ist im Grunde auch alles Torheit, ob einer etwas aus sich habe, oder ob er es von anderen habe; ob einer durch sich wirke, oder ob er durch andere wirke; die Hauptsache ist, daß man ein großes Wollen habe und Geschick und Beharrlichkeit besitze, es auszuführen, alles übrige ist gleichgültig«. 387

Berlin, im Februar 1924. R. v. Mises.

HAUPTAUFSÄTZE

Zeichnerische Ermittlung der elastischen Linie eines federnd gestützten, statisch unbestimmten Balkens.

Von **C. B. BIEZENO** in Delft (Holland).

Die Aufgabe, auf zeichnerischem Wege beim federnd gestützten, statisch unbestimmten Balken, die Auflagerkräfte zu bestimmen, ist schon auf verschiedene Weise behandelt worden[1]. Wenn sie hier von Neuem gestellt wird, geschieht dies deshalb, weil die bisherigen Konstruktionen ziemlich viel Denkarbeit erfordern, so daß ihre Verbreitung wenig aussichtsvoll erscheint. Es wird sich im folgenden zeigen, daß in vielen Fällen ein einfaches Iterationsverfahren zum Ziele führen kann, wobei man entweder den ursprünglich starr gedachten Balken mit den unter dieser Voraussetzung berechneten Federkräften deformiert denkt, oder umgekehrt die ursprünglich starr gedachten Federn mit den unter dieser Voraussetzung berechneten Auflagerkräften des Balkens. Die Bestimmung der Konvergenzbedingungen dieses einfachen Verfahrens ist der Zweck der folgenden Auseinandersetzungen.

1. Erster Schritt der Berechnung. Wir betrachten einen homogenen, geraden, prismatischen Balken. Die ihn belastenden Kräfte schneiden seine Achse senkrecht und laufen einer der beiden anderen Hauptträgheitsachsen seines Schwerpunktes parallel. Die elastische Unterstützung ist in einer Anzahl ursprünglich gleich hoch gelegener Punkte $A_0, A_1 \ldots\ldots A_{n+1}$ derart angebracht, daß die Reaktionen $R_0, R_1, R_2 \ldots\ldots R_{n+1}$ erstens den äußeren Kräften parallel laufen, und zweitens den örtlich auftretenden Durchbiegungen der elastischen Linie proportional sind, in der Weise, daß

$$R_i = k_i\, y_i \; (i = 0,\ 1,\ 2, \ldots\ldots n+1).$$

Zunächst bestimmen wir die Durchbiegungen $y_0{}^0, y_1{}^0, \ldots\ldots y_{n+1}{}^0$, die beim vollkommen steifen Balken auftreten würden und berechnen daraus die Kräfte $k_0\, y_0{}^0, k_1\, y_1{}^0, \ldots\ldots k_{n+1}\, y_{n+1}{}^0$, die zusammen mit den äußeren Kräften ein Gleichgewichtsystem bilden. Diesem Kräftesystem unterwerfen wir den Balken, indem wir ihm zugleich seine Biegungselastizität wiedergeben, und bestimmen die zugehörige elastische Linie. Die Durchbiegungen, die bis zur Verbindungsgeraden der äußersten Punkte A_0, A_{n+1} gemessen werden, seien mit $\bar{y}_1{}^1, \bar{y}_2{}^1 \ldots\ldots \bar{y}_n{}^1$ bezeichnet. Hierauf wird zu der gefundenen elastischen Linie eine Schluß- oder Nullinie derart gezogen, daß die bis zu dieser Geraden gemessenen Durchbiegungen $y_0{}^1, y_1{}^1, \ldots\ldots y_{n+1}{}^1$, multipliziert mit den zugehörigen Koeffizienten k Kräfte liefern, die zusammen ein Gleichgewichtsystem bilden.

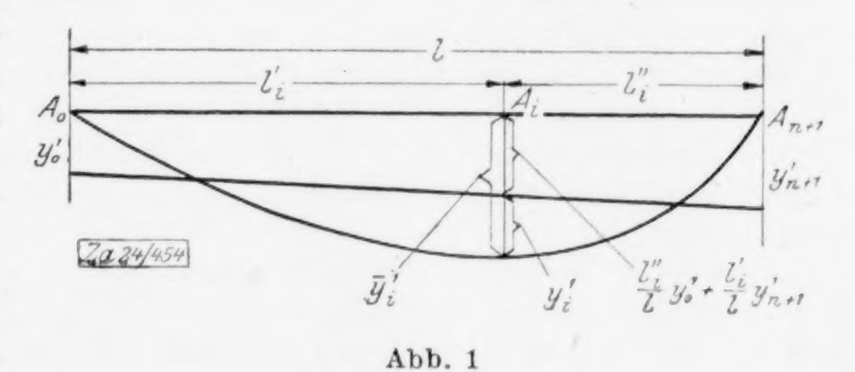


Abb. 1

Untersucht man, wie die neu definierten Durchbiegungen $y_0{}^1, y_1{}^1 \ldots\ldots y_{n+1}{}^1$ mit den vorhergenannten $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots\ldots \bar{y}_n$ zusammenhängen, so findet man zuerst n Beziehungen von der Form (siehe Abb. 1):

$$y_i{}^1 = \bar{y}_i{}^1 - \left(\frac{l_i''}{l}\, y_0{}^1 + \frac{l_i'}{l}\, y_{n+1}{}^1\right) \qquad (i = 1, 2, \ldots\ldots n).$$

Außerdem gelten die beiden Gleichgewichtsbedingungen für die Kräfte $k_i\, y_i{}^1$ $(i = 0, 1, 2, \ldots\ldots n+1)$. Benutzt man diese Gleichungen, um $y_0{}^1$ und $y_{n+1}{}^1$ aus ihnen und den vorangehenden Beziehungen zu eliminieren, so erhält man n lineare Gleichungen von der Form:

$$y_1{}^1 = a_{11}\, \bar{y}_1{}^1 + a_{12}\, \bar{y}_2{}^1 + a_{13}\, \bar{y}_3{}^1 + \ldots\ldots a_{1n}\, \bar{y}_n{}^1$$

$$y_2{}^1 = a_{21}\, \bar{y}_1{}^1 + a_{22}\, \bar{y}_2{}^1 + a_{23}\, \bar{y}_3{}^1 + \ldots\ldots a_{2n}\, \bar{y}_n{}^1$$

$$\vdots$$

$$y_n{}^1 = a_{n1}\, \bar{y}_1{}^1 + a_{n2}\, \bar{y}_2{}^1 + a_{n3}\, \bar{y}_3{}^1 + \ldots\ldots a_{nn}\, \bar{y}_n{}^1.$$

[1] Siehe z. B.: Ostenfeld, Zeitschrift für Architektur- und Ingenieurwesen 1905, S. 47 bis 66. — Biezeno, Graphische bepaling van de overgangsmomenten van een elastisch ondersteunden balk, Verslagen van de Koninklyke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, Deel XXIII. November 1917.

2. Zweiter Schritt. Es werde nun der Balken den in **1** definierten Kräften $k_0 y_0^1, k_1 y_1^1, \ldots\ldots k_{n+1} y_{n+1}^1$ unterworfen und seine elastische Linie gezeichnet. Die aus dieser elastischen Linie zu entnehmenden Durchbiegungen $\bar{y}_1^2\, \bar{y}_2^2, \ldots\ldots \bar{y}_n^2$ der Punkte $A_1, \ldots\ldots A_n$ (gemessen bis zur Verbindungsgeraden der Punkte A_0 und A_{n+1}), können wie folgt in den y_i^1 $(i = 1, 2, \ldots\ldots n)$ ausgedrückt werden:

$$\bar{y}_1^2 = \alpha_{11} k_1 y_1^1 + \alpha_{12} k_2 y_2^1 + \ldots\ldots + \alpha_{1n} k_n y_n^1$$

$$\bar{y}_2^2 = \alpha_{21} k_1 y_1^1 + \alpha_{22} k_3 y_2^1 + \ldots\ldots + \alpha_{2n} k_n y_n^1$$

$$\vdots$$

$$\bar{y}_n^2 = \alpha_{n1} k_1 y_1^1 + \alpha_{n2} k_2 y_2^1 + \ldots\ldots + \alpha_{nn} k_n y_n^1.$$

Hierin bedeuten die α_{ij} die zu dem Balken gehörigen Einflußzahlen.

Auch jetzt kann wieder zu der gefundenen elastischen Linie eine Nullinie gezogen werden, derart, daß die auf diese Linie bezogenen Durchbiegungen $y_0^2, y_1^2, \ldots\ldots y_{n+1}^2$, multipliziert mit den korrespondierenden Faktoren k, Veranlassung geben zu einem System von Kräften, die sich das Gleichgewicht halten. Es gelten also die Beziehungen:

$$y_1^2 = a_{11} \bar{y}_1^2 + a_{12} \bar{y}_2^2 + \ldots\ldots + a_{1n} \bar{y}_n^2$$

$$y_2^2 = a_{21} \bar{y}_1^2 + a_{22} \bar{y}_2^2 + \ldots\ldots + a_{2n} \bar{y}_n^2$$

$$\vdots$$

$$y_n^2 = a_{n1} \bar{y}_1^2 + a_{n2} \bar{y}_2^2 + \ldots\ldots + a_{nn} \bar{y}_n^2.$$

Es zeigt sich, daß die Durchbiegungen y_i^2 aus den Durchbiegungen y_i^1 durch eine homogene lineare Transformation

$$y_1^2 = \beta_{11} y_1^1 + \beta_{12} y_2^1 + \ldots\ldots + \beta_{1n} y_n^1$$

$$y_2^2 = \beta_{21} y_1^1 + \beta_{22} y_2^1 + \ldots\ldots + \beta_{2n} y_n^1$$

$$\vdots$$

$$y_n^2 = \beta_{n1} y_1^1 + \beta_{n2} y_2^1 + \ldots\ldots + \beta_{nn} y_n^1$$

gewonnen werden können; und zwar ist die Transformation $|\beta|$ aufzufassen als das Produkt der beiden Transformationen $|a|$ und $|\alpha|$.

3. Fortsetzung des Verfahrens. Stellen wir nun die Frage, welche Bedeutung die bis jetzt gefundenen Größen y_i^0, y_i^1, y_i^2 für unser Problem haben. Wie beschrieben, würden die zuerst bestimmten Durchbiegungen y_i^0 auftreten, wenn der Balken unendlich steif wäre. Betrachten wir aber die Gesamtheit der Federn und den Balken als zwei voneinander getrennte Systeme, so werden wir den biegsamen Balken, von den äußeren Kräften und von den Kräften $-k_i y_i^0$ belastet, nicht mit den Endpunkten der mit $k_i y_i^0$ belasteten Federn in Uebereinstimmung bringen können, eben weil wir dem Balken seine Elastizität wiedergegeben haben. Jedoch könnte man versuchen, die Verbindung durch Einführung von zwei gleichen aber dem Zeichen nach entgegengesetzten Kraftsystemen $k_i y_i^1$ (deren jedes für sich im Gleichgewicht ist) zu ermöglichen.

Dieser Versuch würde, wie aus den in **1** gegebenen Auseinandersetzungen erhellt, gelingen, wenn der einmal gebogene Balken in seiner Form erstarrt bliebe. In Wirklichkeit ist dies nicht der Fall, sondern der Balken erleidet unter Einwirkung der Kräfte $-k_i y_i^1$ eine neue Formänderung. Dies hat zur Folge, daß auch jetzt die Uebereinstimmung zwischen Federn und Balken noch nicht herzustellen ist, und daß durch Einführung zweier Kraftsysteme $k_i y_i^2$ und $-k_i y_i^2$ der eben gemachte Versuch wiederholt werden muß.

Wenn nur die Federn von den Kräften $k_i y_i^2$ belastet würden, könnte der Balken über die Federendpunkte hingelegt werden. Nun mißlingt die Verbindung von Neuem, weil der Balken eine zweite Zusatzdurchbiegung erhält; diese Formänderung hat Größen y_i^3 zur Folge, welche in derselben Weise aus den y_i^2 abgeleitet werden, wie die y_i^2 aus den y_i^1. In dieser Weise wird man zu einem unendlich fortlaufenden Prozeß geführt, der nur konvergiert, wenn alle Reihen

$$\sum_{m=0}^{\infty} y_1^m, \qquad \sum_{m=0}^{\infty} y_2^m, \ldots\ldots \sum_{m=0}^{\infty} y_n^m$$

konvergieren. In diesem Falle haben aber die gesuchten Reaktionen

$$R_i = k_i \sum_{m=0}^{\infty} y_i^m \qquad (i = 0, 1 \ldots\ldots n+1).$$

4. Analytische Bedeutung des Verfahrens. Konvergenzbedingung. Wie aus **3** hervorgeht, stimmt das vorgeschlagene Iterationsverfahren analytisch mit einer ad infinitum wiederholten homogen-linearen Substitution überein. Diese Substitution kann geometrisch als eine affine Transformation eines n-dimensionalen Raumes aufgefaßt werden. In einem solchen Raume treten dann die $y_1^m, y_2^m, y_3^m, y_n^m$ als die auf ein vollständiges rechtwinkliges Koordinatensystem bezogenen Koordinaten eines Punktes P^m auf.

Bekanntlich gibt es bei jeder affinen Transformation n durch den Nullpunkt hindurchgehende Geraden, welche in sich transformiert werden. Bezeichnen wir diese Geraden (die, wie nachher bewiesen wird, in unserem Falle alle reell sind), im Gegensatz zu den rechtwinkligen Koordinatachsen $Y_1, Y_2, \ldots\ldots Y_n$ mit $Z_1, Z_2, \ldots\ldots Z_n$, so wird ein Punkt $(0, 0, \ldots\ldots z_i, \ldots\ldots 0, 0)$ irgend einer dieser Achsen bei der Transformation übergeführt in den Punkt $(0, 0, \ldots\ldots \varrho_i z_i, \ldots\ldots 0, 0)$. Die Koeffizienten ϱ sind die Wurzeln einer algebraischen Gleichung n-ten Grades, die in bekannter Weise aus der Transformationsdeterminante abgeleitet werden kann.

Es handelt sich nun darum, zu untersuchen, wie die aus dem Punkte $P^0(y_1^0, y_2^0, \ldots y_n^0)$ abgeleiteten Punkte $P^1(y_1^1, y_2^1, \ldots\ldots y_n^1)$, P^2, P^3 usw., im Raume liegen, und es empfiehlt sich, diese Untersuchung in Bezug auf das schiefwinklige Z-Achsenkreuz anzustellen. Dabei zeigt sich, daß die notwendige und hinreichende Bedingung für die Konvergenz des Iterationsverfahrens lautet:

$$|\varrho_i| < 1 \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots\ldots n).$$

Denn wenn alle $|\varrho_i| < 1$ sind, sind die Reihen $z_i^0 + z_i^1 + z_i^2 + \ldots\ldots$ konvergent, und da die Summen $y_i^0 + y_i^1 + y_i^2 + \ldots\ldots$ homogene lineare Funktionen der z Summen sind, sind auch die letzteren konvergent. Und umgekehrt werden die y_i Summen divergieren, wenn eine oder mehrere der z Reihen divergieren. Wir müßten jetzt also untersuchen, unter welchen Umständen die Bedingungen $|\varrho_i| < 1$ befriedigt sind, und hätten zu diesem Zweck die Substitution $|\beta|$ näher zu studieren.

5. Die entscheidende Determinantengleichung. Anstatt dessen ziehen wir vor, in etwas anderer Weise vorzugehen und bemerken, daß jeder Z-Achse eine einfache mechanische Bedeutung beigelegt werden kann. Deutet doch eine derartige Achse auf die Möglichkeit hin, den Balken in den Punkten $A_0, A_1, \ldots\ldots A_{n+1}$ derart durch im Gleichgewicht befindliche Kräfte $P_0, P_1, \ldots\ldots P_{n+1}$ zu belasten, daß die auftretenden Federreaktionen $R_0, R_1, \ldots\ldots R_{n+1}$ diesen Kräften proportional sind $(R_i = \mu_i P_i)$, Für eine derartige Belastung gelten also die Gleichungen:

$$(1-\mu) P_1 \alpha_{11} + (1-\mu) P_2 \alpha_{12} + \ldots\ldots (1-\mu) P_n \alpha_{1n} = \frac{\mu P_1}{k_1} - \frac{l_1''}{l}\frac{\mu P_0}{k_0} - \frac{l_1'}{l}\frac{\mu P_{n+1}}{k_{n+1}}$$

$$(1-\mu) P_1 \alpha_{21} + (1-\mu) P_2 \alpha_{22} + \ldots\ldots (1-\mu) P_n \alpha_{2n} = \frac{\mu P_2}{k_2} - \frac{l_2''}{l}\frac{\mu P_0}{k_0} - \frac{l_1'}{l}\frac{\mu P_{n+1}}{k_{n+1}}$$

$$(1-\mu) P_1 \alpha_{n1} + (1-\mu) P_2 \alpha_{n2} + \ldots\ldots (1-\mu) P_n \alpha_{nn} = \frac{\mu P_n}{k_n} - \frac{l_n''}{l}\frac{\mu P_0}{k_0} - \frac{l_n'}{l}\frac{\mu P_{n+1}}{k_{n+1}},$$

die zum Ausdruck bringen, daß der von den äußeren Kräften und von den Federreaktionen gebogene Balken mit den Endpunkten der von den Kräften μP_i belasteten Federn in Verbindung gebracht werden kann (vergl. Abb. 2).

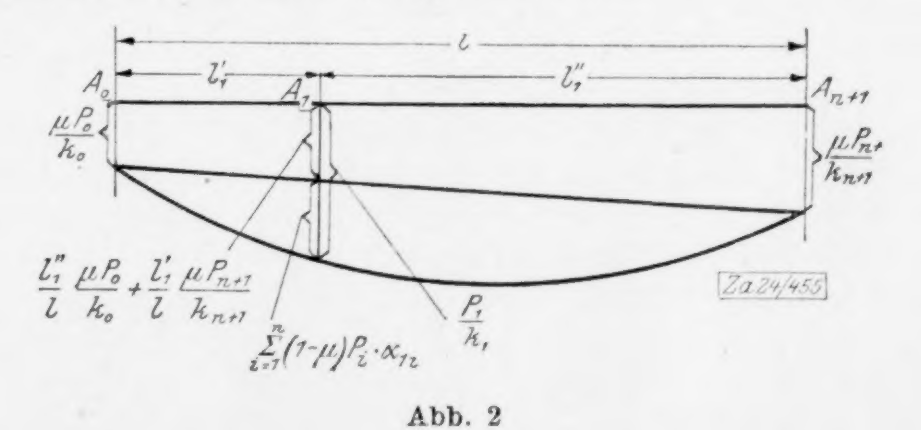


Abb. 2

Ersetzt man in diesen Gleichungen P_0 und P_{n+1} durch die für sie aus den Gleichgewichtsbedingungen folgenden Werte:

$$P_0 = -\left\{\frac{l_1''}{l} P_1 + \frac{l_2''}{l} P_2 + \ldots\ldots \frac{l_n''}{l} P_n\right\}, \qquad P_{n+1} = -\left\{\frac{l_1'}{l} P_1 + \frac{l_2'}{l} P_2 + \ldots\ldots \frac{l_n'}{l} P_n\right\},$$

so erhält man die Gleichungen:

$$P_1\left\{(1-\mu)\,\alpha_{11}-\mu\left(\frac{1}{k_1}+\frac{l_1''^2}{k_0 l^2}+\frac{l_1'^2}{k_{n+1} l^2}\right)\right\}+P_2\left\{(1-\mu)\,\alpha_{12}-\mu\left(\frac{l_1'' l_2''}{k_0 l^2}+\frac{l_1' l_2'}{k_{n+1} l^2}\right)\right\}+\ldots=0$$

$$P_1\left\{(1-\mu)\,\alpha_{21}-\mu\left(\frac{l_2'' l_1''}{k_0 l^2}+\frac{l_2' l_1'}{k_{n+1} l^2}\right)\right\}+P_2\left\{(1-\mu)\,\alpha_{22}-\mu\left(\frac{1}{k_2}+\frac{l_2''^2}{k_0 l^2}+\frac{l_2'^2}{k_{n+1} l^2}\right)\right\}+\ldots=0$$

$$\vdots$$

$$P_1\left\{(1-\mu)\,\alpha_{n1}-\mu\left(\frac{l_n'' l_1''}{k_0 l^2}+\frac{l_n' l_1'}{k_{n+1} l^2}\right)\right\}+P_2\left\{(1-\mu)\,\alpha_{n2}-\mu\left(\frac{l_n'' l_2''}{k_0 l^2}+\frac{l_n' l_2'}{k_{n+1} l^2}\right)\right\}+\ldots\ldots=0.$$

Denkt man sich nun den Balken steif und die unteren Endpunkte der stützenden Zwischenfedern frei, so erhalten wir ein elastisches System, an welchem wir den Größen

$$\frac{1}{k_i}+\frac{l_i''^2}{k_0 l^2}+\frac{l_i'^2}{k_{n+1} l^2} \quad \text{und} \quad \frac{l_i'' l_j''}{k_0 l^2}+\frac{l_i' l_j'}{k_{n+1} l^2}$$

eine anschauliche Bedeutung geben können. Belasten wir nämlich den freien unteren Endpunkt der i-ten Feder mit einer Einheitskraft, so verschiebt sich dieser Punkt um den Betrag gleich der ersten dieser Größen, während der freie Endpunkt einer willkürlichen Zwischenfeder sich um den Betrag gleich der zweiten Größe senkt. Die beiden angeführten Größen sind also als Einflußzahlen des benutzten Hilfssystems zu betrachten. Wir bezeichnen sie mit a_{ii} und a_{ij}.

Ersetzen wir außerdem noch $\frac{\mu}{1-\mu}$ durch ϱ, so erhalten wir die Gleichungen:

$$P_1(\alpha_{11}-a_{11}\,\varrho)\;+P_2(\alpha_{12}-a_{12}\,\varrho)\;+\ldots\ldots=0$$
$$P_1(\alpha_{21}-a_{21}\,\varrho)\;+P_2(\alpha_{22}-a_{22}\,\varrho)\;+\ldots\ldots=0$$
$$\vdots$$
$$P_1(\alpha_{n,1}-a_{n,1}\,\varrho)+P_2(\alpha_{n,2}-a_{n,2}\,\varrho)+\ldots\ldots=0,$$

welche nur eine von Null verschiedene Lösung für die Kräfte $P_1, P_2 \ldots P_n$ zulassen, falls

$$\begin{vmatrix} (\alpha_{11}-a_{11}\,\varrho) & (\alpha_{12}-a_{12}\,\varrho) & \ldots\ldots & (\alpha_{1,n}-a_{1,n}\,\varrho) \\ (\alpha_{21}-a_{21}\,\varrho) & (\alpha_{22}-a_{22}\,\varrho) & \ldots\ldots & \\ \vdots & & & \vdots \\ (\alpha_{n,1}-a_{n,1}\,\varrho) & (\alpha_{n,2}-a_{n,2}\,\varrho) & \ldots\ldots & (\alpha_{n,n}-a_{n,n}\,\varrho) \end{vmatrix}=0.$$

Diese Gleichung hat, wie sich zeigen läßt, lauter reelle Wurzeln. Subtrahiert man nämlich die Elemente der ersten Kolonne in passend gewählten Vielfachen derart von den entsprechenden Elementen aller übrigen Kolonnen, daß die Elemente der ersten Reihe (bis auf das erste Element) Konstante werden, so entsteht eine Determinante, deren Elemente γ_{ij} für alle i und $j>1$, gegeben sind durch:

$$\gamma_{ij}=\alpha_{ij}-a_{ij}\,\varrho-\frac{a_{1j}}{a_{11}}(\alpha_{i,1}-a_{i,2}\,\varrho).$$

Subtrahiert man dann die Elemente der ersten Reihe von der neuentstandenen Determinante in solchem Maße vervielfacht von den entsprechenden Elementen aller übrigen Reihen, daß auch die Elemente der ersten Kolonne (bis auf das erste Element) zu Konstanten werden, so entsteht eine Determinante, deren Elemente δ_{ij} für alle i und $j>1$ durch

$$\delta_{ij}=\alpha_{ij}-a_{ij}\,\varrho-\frac{a_{1j}}{a_{11}}(\alpha_{i,1}-a_{i1}\,\varrho)-\frac{a_{i1}}{a_{11}}\left(\alpha_{1j}-\frac{a_{1j}}{a_{11}}\,\varrho\right)$$

bestimmt sind.

Die δ-Determinante ist also, ebenso wie die $(\alpha-a\,\varrho)$-Determinante symmetrisch. Es ist leicht einzusehen, wie man durch geeignete Wiederholung des beschriebenen Verfahrens die ursprüngliche Determinante in eine andere symmetrische transformieren kann, deren Elemente, bis auf diejenigen der Hauptdiagonale, Konstante ε_{ij} sind. Die Elemente der Hauptdiagonale haben die Form $(\varepsilon_{ii}-e_{ii}\,\varrho)$. Dividiert man schließlich die Elemente der zum Elemente $(\varepsilon_{ii}-e_{ii}\,\varrho)$ gehörigen Reihe und Kolonne durch $\sqrt{e_{ii}}$, so erhält man die Determinante in der Form einer Säkulargleichung, die bekanntlich nur reelle Wurzeln hat [1]). Hiermit ist also bewiesen, daß die vorher genannten Z-Achsen reell sind, und daß es im allgemeinen n verschiedene Lastsysteme $P_0, P_1 \ldots\ldots P_{n+1}\,(\equiv L_i)$ gibt, welche die im Anfang dieser Nummer erwähnte Eigenschaft haben.

[1]) Vgl. z. B. G. Kowalewski, Einführung in die Determinantentheorie, Leipzig 1909, S. 125.

Bei dem in **3** beschriebenen Prozesse hat man es nun allerdings, nachdem die ersten beim steifgedachten Balken auftretenden Reaktionskräfte bestimmt sind, mit einem willkürlichen, in A_0, A_1 ..... A_{n+1} angreifenden Kräftesystem zu tun. Dieses System läßt sich aber stets in höchstens n Systeme vom Typus L zerlegen, so daß nur die Untersuchung der letzteren nötig ist.

Daß das oben erläuterte Verfahren auf ein L_i-System angewandt, konvergiert, wenn alle $|\varrho_i| > 1$ sind, sieht man nun mechanisch auch leicht wie folgt ein. Die zu dem Lastsystem L_i gehörigen Kräfte rufen in den Federn Reaktionskräfte hervor, welche die μ_i-fache Größe haben. Der freigedachte Balken ist also dem Lastsystem $(1-\mu_i)\,L_i$ unterworfen, die Federn dem Lastsystem $\mu_i\,L_i$. Führt man nun die in **4** gegebene Zeichenvorschrift aus und faßt man die Belastung $(1-\mu_i)\,L_i$ als erste Balkenbelastung auf, dann spielt $-\mu_i\,L$ die Rolle der zweiten Belastung. Es ist also klar, daß Konvergenz dann und nur dann eintritt, wenn $\left|\frac{\mu_i}{1-\mu_i}\right| = |\varrho_i| < 1$.

6. Die Konvergenzbedingung. Wir stellen jetzt die Forderung, daß die Wurzeln der Gleichung:

$$\begin{vmatrix} (\alpha_{11}-a_{11}\,\varrho) & (\alpha_{12}-a_{12}\,\varrho) & \dots & (\alpha_{1n}-a_{1n}\,\varrho) \\ (\alpha_{21}-a_{21}\,\varrho) & (\alpha_{22}-a_{22}\,\varrho) & \dots & \\ \vdots & & & \vdots \\ (\alpha_{n1}-a_{n1}\,\varrho) & (\alpha_{n2}-a_{n2}\,\varrho) & \dots & (\alpha_{nn}-a_{nn}\,\varrho) \end{vmatrix} = 0$$

ihrem absoluten Betrag nach kleiner als 1 sind, daß also

$$-1 < \varrho < 1 \qquad (i = 1, 2 \,.....\, n)$$

und verwenden dabei den Sturmschen Lehrsatz. Anstatt aber die eigentlichen Sturmschen Funktionen zu benutzen, gebrauchen wir die Funktionen

$$\Delta_1^{(\alpha-a\varrho)} \equiv (\alpha_{11}-a_{11}\,\varrho); \qquad \Delta_2^{(\alpha-a\varrho)} \equiv \begin{vmatrix} (\alpha_{11}-a_{11}\,\varrho) & (\alpha_{12}-a_{12}\,\varrho) \\ (\alpha_{21}-a_{21}\,\varrho) & (\alpha_{22}-a_{22}\,\varrho) \end{vmatrix};$$

$$\Delta_3^{(\alpha-a\varrho)} \equiv \begin{vmatrix} (\alpha_{11}-a_{11}\,\varrho) & \dots & (\alpha_{13}-a_{13}\,\varrho) \\ \vdots & & \vdots \\ (\alpha_{31}-a_{31}\,\varrho) & \dots & (\alpha_{33}-a_{33}\,\varrho) \end{vmatrix}; \quad \Delta_4^{(\alpha-a\varrho)} \,.....\, \Delta_n^{(\alpha-a\varrho)},$$

die, wie bekannt sein dürfte, durch eine Konstante Δ_0 ergänzt, deren Rolle übernehmen[1]). Werden also in die Reihe

$$\Delta_0,\ \Delta_1^{(\alpha-a\varrho)},\ \Delta_2^{(\alpha-a\varrho)} \,.....\, \Delta_n^{(\alpha-a\varrho)}$$

die Zahlen $\varrho = -1$ und $\varrho = +1$ eingesetzt, so müssen die so erhaltenen Funktionswerte das einemal n Zeichenwechsel, das anderemal 0 Zeichenwechsel aufweisen. Betrachten wir, um festzustellen, unter welchen Umständen dies eintreten wird, zuerst die Determinanten Δ_i^α, also

$$|\alpha_{11}|, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}, \text{ usw.,}$$

so sieht man leicht, daß all diese Determinanten Δ_i^α positiv sind. Es werde der in seinen Endpunkten A_0 und A_{n+1} fest gestützte Balken in dem Punkte A_2 mit einer Einheitskraft belastet. Dann ist die Durchbiegung im Punkte A_1 gleich α_{12}. Sollte diese Durchbiegung durch eine in A_1 wirkende Reaktionskraft aufgehoben werden, so müßte diese Kraft $= \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}}$ sein. Die in diesem Falle in A_2 auftretende Durchbiegung ist also $= \alpha_{22} - \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}}\,\alpha_{21} = \frac{\alpha_{22}\,\alpha_{11} - \alpha_{12}\alpha_{21}}{\alpha_{11}} = \frac{\Delta_2^\alpha}{\alpha_{11}}$. Da diese Durchbiegung sicherlich positiv ist, ebenso wie α_{11}, muß auch Δ_2^α positiv sein.

Betrachtet man in derselben Weise den in A_0, A_1, A_2, A_{n+1} fest gestützten Balken, der in A_3 mit einer Einheitskraft belastet ist, so findet man, wenn man zunächst die Stützen A_1 und A_2 fortläßt, für die Durchbiegung in diesen Punkten die Werte α_{13} und α_{23}. Die in A_1 und A_2 auftretenden Reaktionskräfte bestimmen sich aus:

$$R_1\,\alpha_{11} + R_2\,\alpha_{12} = \alpha_{13}, \quad R_1\,\alpha_{21} + R_2\,\alpha_{22} = \alpha_{23}.$$

[1]) Siehe z. B. Salmon, Leçons d Algébre supérieure, traduit par O. Chemin.

Die in A_3 auftretende Durchbiegung ist also, wenn alle vier Stützen vorhanden sind:

$$\alpha_{33} - R_1\,\alpha_{31} - R_2\,\alpha_{32} = \alpha_{33} - \frac{\begin{vmatrix}\alpha_{13} & \alpha_{12}\\ \alpha_{23} & \alpha_{22}\end{vmatrix}\alpha_{31}}{\Delta_2^{\alpha}} - \frac{\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{23}\end{vmatrix}\alpha_{32}}{\Delta_2^{\alpha}} = \frac{\Delta_3^{\alpha}}{\Delta_2^{\alpha}}.$$

Weil diese Durchbiegung wieder positiv ist, ebenso wie Δ_2^{α}, muß auch Δ_3^{α} positiv sein, usw. Genau in derselben Weise ergibt sich, daß die Determinanten Δ_i^{α} und die Determinanten $\Delta_i^{\alpha+a}$ alle positiv sind. Sind doch die Zahlen a aufzufassen als Maxwellsche Einflußzahlen des in **6** definierten Systems und die $(\alpha + a)$ als Einflußzahlen der freien unteren Endpunkte der Zwischenfedern, wenn der biegsame Balken nur in seinen Endpunkten federnd gestützt ist. Wird also der konstanten Zahl Δ_0 ein positiver Wert beigelegt, so sind alle Glieder der Reihe

$$\Delta_0,\ \Delta_1^{(\alpha+a)},\ \Delta_2^{(\alpha+a)}\ \ldots\ldots$$

positiv, so daß nur noch die Bedingung zu erfüllen übrig bleibt, daß die Glieder der Reihe

$$\Delta_0,\ \Delta_1^{(\alpha-a)},\ \Delta_2^{(\alpha-a)}\ \ldots\ldots$$

abwechselndes Vorzeichen haben.

Diese Forderung stimmt überein mit jener anderen, daß die quadratische Form in n Variablen

$$V = \sum_{i=1}^{n} (a_{ii} - \alpha_{ii})\,x_i^2 + 2 \sum_{\substack{i=1\,\ldots\,n\\ j=1\,\ldots\,n}} i = j\,(a_{ij} - \alpha_{ij})\,x_i\,x_j$$

definit-positiv sei. Dazu müssen nämlich die Wurzeln der Gleichung

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - \alpha_{11}) - s & (a_{12} - \alpha_{12}) & \ldots\ldots & (a_{1n} - \alpha_{1n})\\ (a_{21} - \alpha_{21}) & (a_{22} - \alpha_{22}) - s & \ldots\ldots & (a_{2n} - \alpha_{2n})\\ \vdots & & & \vdots\\ (a_{n1} - \alpha_{n1}) & \ldots\ldots & \ldots\ldots & (a_{nn} - a_{nn}) - s \end{vmatrix} = 0$$

sämtlich größer als null sein. Wenden wir auch auf diese Gleichung den Sturmschen Lehrsatz in der oben angedeuteten Weise an, und betrachten wir dazu die Funktionsreihe

$$\Delta^0,\ \left|(a_n - \alpha_{11}) - s\right|,\ \begin{vmatrix}(a_{11} - \alpha_{11}) - s & (a_{12} - \alpha_{12})\\ (a_{21} - \alpha_{21}) & (a_{22} - \alpha_{22}) - s\end{vmatrix},\ \ldots\ldots \begin{vmatrix}(a_{11} - \alpha_{11}) - s & \ldots\ldots & (a_{1n} - \alpha_{1n})\\ \vdots & & \vdots\\ (a_{n1} - \alpha_{n1}) & \ldots\ldots & (a_{nn} - \alpha_{nn}) - s\end{vmatrix}$$

in welcher Δ_0 wieder eine Konstante bedeutet, so müssen die Glieder dieser Reihe, wenn $s = 0$ ist, n Zeichenwechsel aufweisen, mit $s = +\infty$ dagegen null Zeichenwechsel. Die letzte Bedingung ist, wenn Δ_0 positiv ist, ohne Weiteres erfüllt. Die erstere fordert, daß alle $\Delta_i^{(\alpha-a)}$ positiv sind. Diese Bedingung stimmt wirklich mit der vorhererwähnten, daß die Reihe

$$\Delta_0,\ \Delta_1^{(\alpha-a)},\ \Delta_2^{(\alpha-a)}\ \ldots\ldots\ \Delta_n^{(\alpha-a)}$$

abwechselnde Zeichen aufweist, überein. Die Forderung, daß der Ausdruck definit-positiv sei, bildet also die endgültige Bedingung dafür, daß das von uns entwickelte Zeichenverfahren konvergiert.

7. Durchführung eines Beispiels. In Abb. 3 ist die Konstruktion für einen auf vier Stützpunkten gelagerten Balken ausgeführt. Die Federn sind von untereinander gleicher Beschaffenheit vorausgesetzt.

Die Belastung von 10 t und 5 t würde, wenn der Balken steif wäre, die Federreaktionen 3,3 t, 3,6 t, 3,9 t und 4,2 t hervorrufen. Die graphische Bestimmung dieser Kräfte ist in der Zeichnung nicht angegeben[1]). Die zugehörige Momentenfläche ist in

---

[1]) Sie könnte etwa in folgender Art vor sich gehen. Es werde Größe und Lage der Einzelkraft K_1 bestimmt, welche dem steifgedachten Balken im Punkte A_0 eine Einsenkung Eins, im Punkte A_{n+1} eine Einsenkung Null erteilt. Dazu wird mittels eines Seilpolygons die Resultante der in den Punkten A_0, A_1 und A_2 wirkenden Kräfte k_0, $\frac{l_1''}{l}\,k_1$, und $\frac{l_2''}{l}\,k_2$ bestimmt. In derselben Weise konstruiere man die Lage und Größe der Kraft K_2, welche dem steifgedachten Balken im Punkte A_0 eine Durchbiegung Null, im Punkte A_{n+1} eine Durchbiegung Eins erteilt.

Dann zerlege man, abermals mittels eines Seilpolygons, die gegebene Belastung in zwei Kräften, welche mit K_1 und K_2 zusammenfallen. Aus den Größen dieser Komponenten bestimmt man unmittelbar die gesuchten Reaktionen.

Abb. 3b gezeichnet. Aus dieser Fläche folgt die elastische Linie, Abb. 3c. Die Konstruktion der zu dieser Linie gehörigen Nullinie, welche, wie erläutert, derart zu ziehen ist, daß die aus Abb. 3c zu entnehmenden Federkräfte ein Gleichgewichtsystem bilden, ist wieder unterdrückt[1]).

Die zu diesem neuen Kraftsystem gehörige Momentenfläche ist in Abb. 3d aufgenommen; die damit korrespondierende elastische Linie, mit entsprechender Nullinie in Abb. 3e.

Das bis hierher verfolgte Zeichenverfahren wäre nun so weit zu wiederholen, bis die auftretenden Federreaktionen klein genug sind, um vernachlässigt werden zu können. In vielen Fällen, wie auch in dem hier behandelten, kann aber eine bedeutende Abkürzung dann erzielt werden, wenn die zu zwei aufeinander folgenden Approximationen gehörigen Reaktionskräfte in einem festen (oder nahezu festen) Verhältnis zu einander stehen.

Tritt dieser Fall z. B. bei der m-ten und $(m+1)$-ten Approximation ein, in der Weise, daß für jedes i

$$\frac{R_i^{m+1}}{R_i^m} = \nu,$$

so gilt auch weiterhin für jedes $p = 1, 2, \ldots .,$

$$\frac{R_i^{m+p+1}}{R_i^{m+p}} = \nu.$$

Der Beitrag, welchen alle Approximationen von der m-ten an, zu den Reaktionen R_i liefern, ist also:

$$R_i^m \frac{1}{1-\nu}.$$

In dem besprochenen Beispiel tritt die genannte Gleichförmigkeit (praktisch vollkommen) zwischen der zweiten Approximation und der, in der Abbildung nicht aufgenommenen, dritten auf, mit $\nu = -0{,}52$. Wir haben uns also darauf beschränken können, zu den Kräften R_i^0 die Kräfte R_i^1 und $\frac{1}{1-\nu} R_i^2$ zu addieren. Mit Hilfe der in dieser Weise gefundenen Kräfte R_i ist als Kontrolle in den Abb. 3f, g, h die elastische Linie konstruiert. Die aus Abb. 3h zu entnehmenden Einsenkungen liefern Federkräfte, welche von den Kräften R_i nicht zu unterscheiden sind.

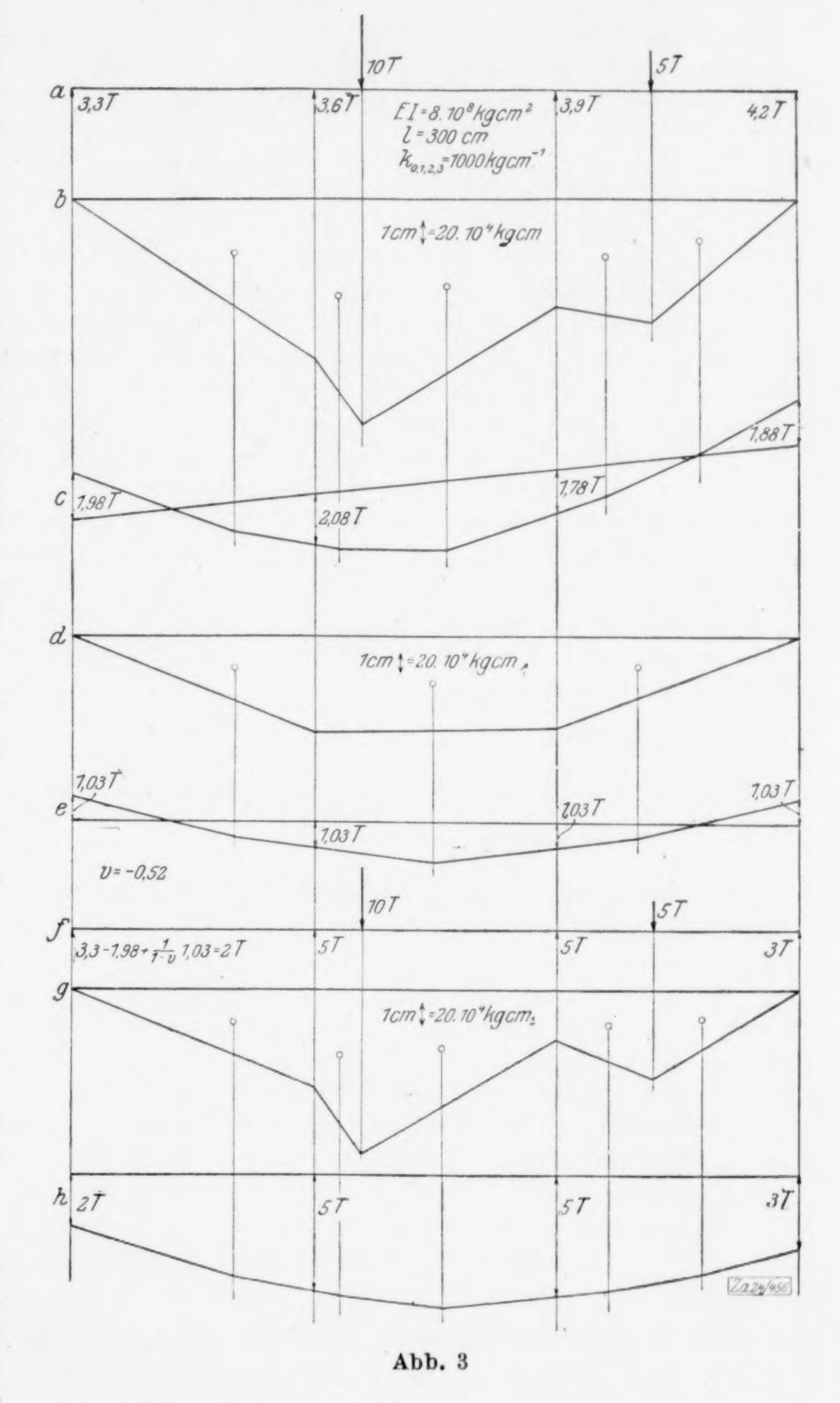


Abb. 3

8. Umkehrung des Verfahrens. Wir wollen jetzt noch zeigen, wie ein ähnliches Verfahren wie das eben entwickelte zum Ziel führen kann, wenn alle ϱ-Werte größer als 1 sind. In diesem Falle betrachten wir anstatt des Balkens zunächst die Federn als vollkommen steif und bestimmen mittels des Mohrschen elastischen Seilpolygons die auftretenden Reaktionskräfte. Hierauf erteilt man den Federn ihre natürliche Elastizität und bestimmt die zugehörigen Einsenkungen. Wir lassen den Federn auch wirklich

[1]) Die Konstruktion läuft der in der vorigen Note angedeuteten vollkommen parallel.

diese Einsenkungen zukommen und stellen fest, daß der gebogene Balken, dessen Punkte $A_0, A_1, \ldots\ldots A_{n+1}$ in gerader Linie liegen, jetzt nicht mehr mit den Endpunkten der Federn in Verbindung zu bringen ist, ohne ihn durch ein neues einzuprägendes Kraftsystem nachträglich zu biegen. Dieses Kräftesystem unterwerfen wir der Bedingung, 1. daß es nur zusammengesetzt ist aus Einzelkräften, welche in den Punkten A_0, A_1, ... A_{n+1} angreifen, und 2. daß es ein Gleichgewichtsystem ist. Die Bestimmung der einzelnen Kräfte erfolgt auch jetzt graphisch mittels eines elastischen Seilpolygons. Die Federn werden, nachdem ihnen die soeben besprochenen Deformationen erteilt worden sind, bei diesem Prozeß natürlich fest gedacht.

Sobald die Kräfte gefunden sind, bestimmt man die Einsenkungen, welche die elastischen Federn durch sie erleiden würden. Dann versucht man den Balken durch Einführung eines neuen Gleichgewichtsystems von Kräften den ihm abermals entrinnenden Stützpunkten nachholen zu lassen, usw.

Daß dieser Prozeß, der in Abb. 4 ausgeführt worden ist, wirklich konvergiert, wenn alle ϱ-Werte > 1 sind, sieht man am einfachsten wie folgt ein. Das bei den steifgedachten Federn zuerst auftretende Reaktionssystem, läßt sich nach **5** im Allgemeinen in n verschiedenen Lastsysteme L_i zerlegen. Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß das neue Verfahren konvergiert, ist deshalb, daß es, wenn auf jedes dieser Lastsysteme absonderlich angewandt, konvergiert.

Nun ruft ein L_i-System in den Federn ein Kraftsystem $\mu_i L_i$ hervor, wenn es auf den auf Federn ruhenden Balken angebracht wird; das heißt: der mit $(1 - \mu_i) L_i$ belastete Balken und die mit $\mu_i L_i$ belasteten Federn sind ohne Anwendung jeglicher Zusatzkräfte mit einander in Verbindung zu bringen.

Würde also bei dem neu beschriebenen Verfahren ein Lastsystem L_i auf dem freigedachten Balken erforderlich sein um ihn über die Endpunkte der bereits eingedrückten Federn hinzubiegen, so wäre bei der nächsten Approximation ein Lastsystem $\frac{-\mu_i}{1-\mu_i} L_i$ erforderlich. Damit das Näherungsverfahren für das Lastsystem L_i konvergiert, müßte also $\left|\frac{\mu_i}{1-\mu_i}\right| < 1$, also $\varrho > 1$ sein.

9. Beispiel zum umgekehrten Verfahren. Die Abb. 4a zeigt denselben Balken wie Abb. 3a. Nur ist die Steifigkeit der Federn viermal größer als in dem vorigen Beispiel gewählt.

In Abb. 4c ist das erste elastische Seilpolygon konstruiert, mittels dessen ein Maß für die in A_1 und A_2 auftretenden Uebergangsmomente gefunden wird. Diese Momente verhalten sich bekanntlich wie die Segmente $A_1 A_1'$ und $A_2 A_2'$. In passendem Maßstab sind die von ihnen herrührenden Momentenflächen in Abb. 4b eingezeichnet. Sodann ist nachträglich auch in Abb. 4c die Momentenlinie (gestrichelt 0, I, II, III, IV, V) gezeichnet, sodaß mit der nebenstehenden Polfigur die auftretenden Reaktionskräfte bestimmt werden konnten. Die Werte dieser Kräfte sind in Abb. 4c eingeschrieben worden.

Der nächste Schritt besteht nun darin, daß die Einsenkungen der Zwischenfedern bestimmt werden, und zwar in bezug auf die Verbindungsgerade der Endpunkte A_0 und A_3 der beiden äußersten Federn. Diese relative Verschiebungen sind in Abb. 4d als $A_1 \overline{A_1}$ und $A_2 \overline{A_2}$ eingetragen worden. Hiernach ist das zweite elastische Seilpolygon konstruiert, mittels dessen als Maß für die Uebergangsmomente jetzt $\overline{A_1} A_1'$ resp. $\overline{A_2} A_2'$ gefunden wird.

Weil in den Feldern keine äußere Kräfte vorhanden sind, kann die zugehörige Momentenlinie unmittelbar gezeichnet werden (in der Abb. 4d wiederum gestrichelt angegeben). Die auftretenden Reaktionskräfte werden abermals mit Hilfe einer Polfigur konstruiert. Dieser Prozeß ist in den Abb. 4e, f, g dreimal wiederholt. Beim nächsten Prozeß würde die in **8** erwähnte Gleichförmigkeit auftreten mit $\nu = -0{,}8$.

Nachdem die angenäherten Werte der Reaktionen $R_i = R_i^0 + R_i^1 + R_i^2 + R_i^3 + \frac{1}{1-\nu} R_i^4$ berechnet worden sind, ist schließlich in Abb. 4h die ganze Konstruktion noch einmal als Kontrolle ausgeführt. Es zeigt sich, daß die aus der letzten Polfigur folgenden Reaktionen vollkommen mit den eingeführten Kräften R_i übereinstimmen.

10. Schlußbemerkung. Wie man leicht nachweist, besteht die Konvergenzbedingung für das zweitbehandelte Verfahren darin, daß der Ausdruck

$$V = \sum_{i=1}^{n} (a_{ii} - \alpha_{ii}) \varkappa_i^2 + 2 \sum_{\substack{i=1\ldots\ldots n \\ j=1\ldots\ldots n}} i = j \, (a_{ij} - \alpha_{ij}) \varkappa_i \varkappa_j$$

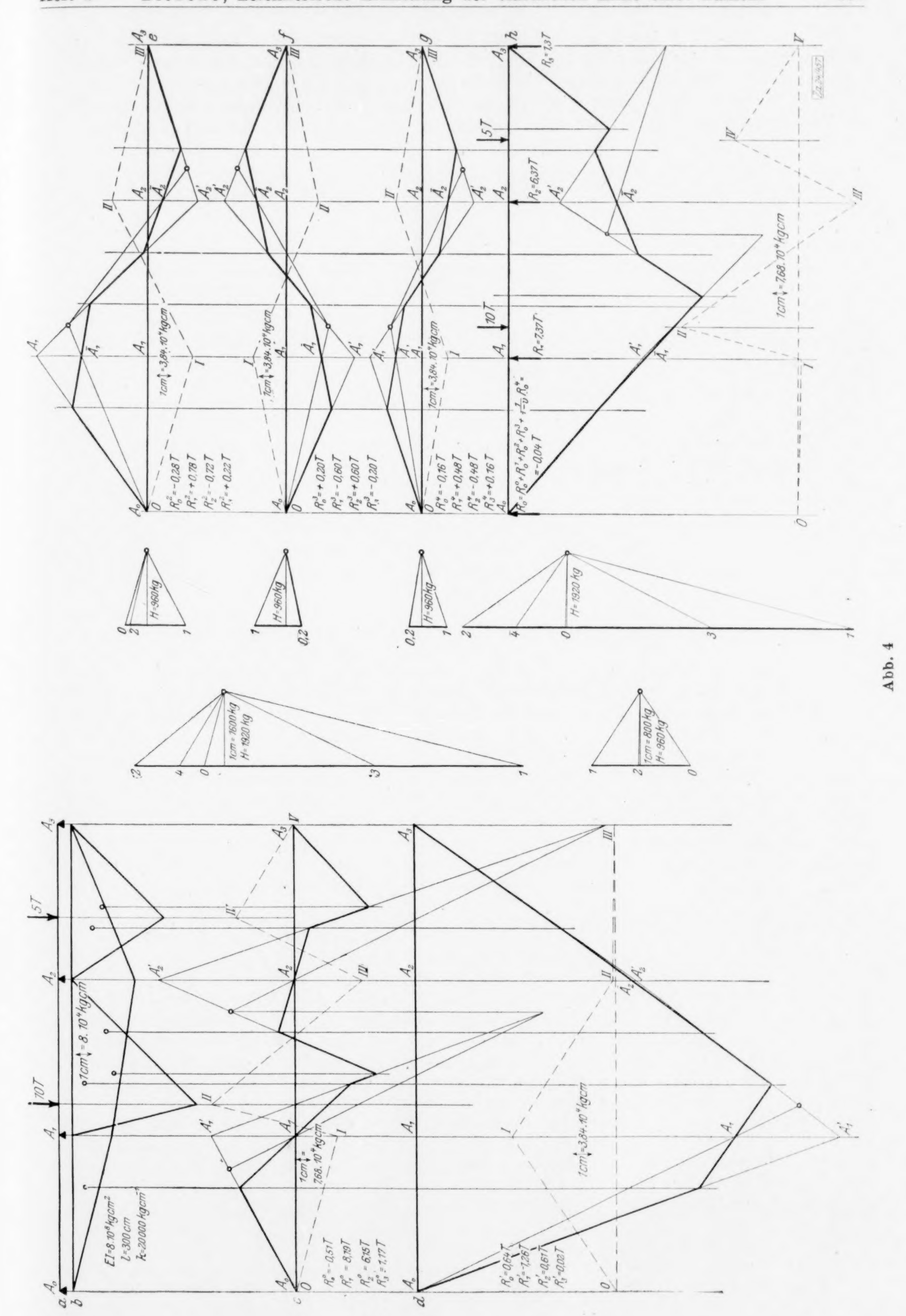


Abb. 4

definit-negativ ist. Ist dieser Ausdruck weder definit-positiv noch definit-negativ, so kann keine der beiden Methoden Verwendung finden. In einem solchen Falle wird vorläufig auf eine der vorher schon zitierten Methoden zurückgegriffen werden müssen.

In vielen Fällen, wenn der Balken steif gegenüber den Federn, oder umgekehrt das Federsystem steif gegenüber dem Balken ist, wird man, ohne auf das Verhalten des Ausdrucks

$$V = \sum_{i=1}^{n} (a_{ii} - \alpha_{ii}) \varkappa_i^2 + 2 \sum_{\substack{i=1\ldots\ldots n \\ j=1\ldots\ldots n}} i = j\,(a_{ij} - \alpha_{ij})\, \varkappa_i \varkappa_j$$

näher einzugehen, entscheiden können, ob der eine oder der andere Prozeß zum Ziel führt.

Ein allgemein gültiges, direkt brauchbares Konvergenzkriterium läßt sich in Anbetracht der vielen Möglichkeiten in bezug auf Stützweite und Elastizität der verschiedenen Federn, wohl kaum aufstellen. Dagegen kann man leicht für den wichtigen Fall des Balkens, der auf gleichen Federn mit gleichen Stützweiten gelagert ist, für beide Verfahren eine Konvergenzgrenze angeben für $n = 1$, $n = 2$ . . . . . ($n =$ die Anzahl der Zwischenfedern, also die Zahl der statischen Unbestimmtheit).

So findet man z. B. für den ersten Prozeß:

	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
$(n+2)\,k \cdot \frac{l^3}{EI} <$	216	259,2	291,5	316,4	336

Wie mein Assistent Herr J. J. Koch bemerkt, scheint die (experimentell gefundene) Formel

$$(n+2)\,k \cdot \frac{\left(\frac{n+3}{n+2}\,l\right)^3}{EI} < 500$$

allgemein zu gelten. Sie ist im Einklang mit dem Kriterium, welches für den über seine ganze Länge elastisch gestützten Balken gilt:

$$q\,l \cdot \frac{l^3}{EI} < 500 \quad (q = \text{Bettungskoeffizient des Bodens}).$$

Für diesen Balken sei übrigens verwiesen auf zwei Abhandlungen vom Verfasser und von Herrn Dr. J. Droste, welche unter dem Titel »Een toepassing van de leer der integraalvergelykingen op de graphische bepaling van de elastische lyn van een over zyn geheele lengte ondersteunden balk« im März dieses Jahres in den »Verslagen der Koninklyke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam« erschienen sind.

Die dort gegebene Schlußbemerkung, mittels welcher es möglich wird die Konvergenzgrenze künstlich zu erhöhen, kann auch hier angewandt werden. Es werde aber auch in dieser Hinsicht auf die genannten Abhandlungen verwiesen.

Delft, im Juni 1923. 303

Über Wirbelbewegung in einer kompressiblen Flüssigkeit.

Von **A. FRIEDMANN** in Petersburg.

Die Untersuchungen von Bjerknes[1]) und von Silberstein[2]) haben gezeigt, daß im Gegensatz zu den Lagrangeschen Sätzen für inkompressible Flüssigkeiten bei der Bewegung einer kompressiblen Flüssigkeit, auch wenn nur konservative Kräfte auftreten, Wirbel entstehen und verschwinden können, sobald der Druck keine Funktion der Dichte allein ist, sondern auch von der Temperatur abhängt. Andererseits legen aerologische Beobachtungen nahe, zu behaupten[3]), daß die Flächen konstanten Druckes und konstanter Temperatur in der Atmosphäre sich schneiden, woraus folgt, daß hier in der Tat der Druck keine Funktion der Dichte allein ist. Infolgedessen erweist sich das Studium solcher Bewegungen einer kompressiblen Flüssigkeit, bei welchen der Druck keine bestimmte Funktion der Dichte ist, als eine fundamentale Aufgabe der dynamischen Meteorologie.

---

[1]) Bjerknes, Meteorol. Ztschr. Bd. 17, 1900, S. 97 und S. 145. Bd. 19, 1902, S. 97.
[2]) Silberstein, Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie 1896, S. 280.
[3]) Bjerknes, Dynamische Meteorologie und Hydrographie, Bd. II, 1912, S. 90.

Wenn die Dichte eine Konstante oder eine bestimmte Funktion des Druckes ist, haben wir es in den Grundgleichungen der klassischen Hydromechanik mit vier Unbekannten zu tun: mit den drei Komponenten der Geschwindigkeit und mit dem Drucke. Die drei Bewegungsgleichungen zusammen mit der Kontinuitätsgleichung geben im allgemeinen die Möglichkeit, bei gewissen Anfangs- und Grenzbedingungen die Werte der Geschwindigkeitskomponenten und des Druckes zu finden. Bei den Untersuchungen der allgemeinen Bewegungen einer kompressiblen Flüssigkeit wächst die Zahl der zu bestimmenden Unbekannten auf fünf, da zu den oben genannten vier Unbekannten die Dichte als fünfte hinzukommt. Infolgedessen genügen die vier angeführten Gleichungen nicht mehr; um die Bewegung einer kompressiblen Flüssigkeit zu bestimmen, müssen wir noch eine Beziehung zu Hilfe nehmen, und zwar die sogenannte Gleichung der zugeführten Energie; sie ist eine Folgerung aus dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik.

Das Aufstellen der Gleichung der zugeführten Energie ist nicht einfach; dieser Umstand erschwert eine vollständige Lösung der Aufgaben über die Bewegung einer kompressiblen Flüssigkeit derart, daß es zweckmäßig erscheint, zunächst die Eigenschaften der Bewegungen einer kompressiblen Flüssigkeit ohne Benutzung jener Gleichung zu studieren. Wir folgen dabei einem Weg, der dem von Helmholtz bei der Ableitung der Wirbelsätze eingeschlagenen analog ist.

Bekanntlich hat Helmholtz seine Gleichungen und die sich daraus ergebenden fundamentalen Sätze über die Wirbelfäden auf die Weise erhalten, daß er aus den Gleichungen der Hydrodynamik den Druck eliminierte. Indem wir diese Idee von Helmholtz verallgemeinern, wollen wir die in unseren Gleichungen auftretenden Unbekannten in zwei Klassen einteilen. Zur ersten Gruppe wollen wir die Geschwindigkeitskomponenten und ihre Ableitungen verschiedener Ordnung nach der Zeit und nach den Koordinaten rechnen, zur zweiten den Druck, die Dichte und ihre Ableitungen verschiedener Ordnung nach der Zeit und nach den Koordinaten; die Größen der ersten Klasse werden wir als kinematische Elemente, die der zweiten als dynamische Elemente bezeichnen. Indem wir aus den vier Gleichungen der Hydrodynamik die dynamischen Elemente eliminieren, erhalten wir eine Reihe von Beziehungen zwischen den kinematischen Elementen, welche den Gleichungen von Helmholtz analog sind. Diese Beziehungen dürfen wir als die Bedingungen der dynamischen Möglichkeit der Bewegung einer kompressiblen Flüssigkeit bezeichnen; denn aus allen kinematisch denkbaren Bewegungen heben sie gerade diejenigen hervor, welche dynamisch möglich sind.

Der praktische Wert dieser Bedingungen ist folgender. Sehr oft gestatten die Eigenschaften der zu untersuchenden Bewegung, eine gewisse allgemeine Form für die Darstellung der Bewegung anzugeben, die eine Reihe willkürlicher Konstanten oder Funktionen enthält. Indem wir von den Bedingungen der dynamischen Möglichkeit ausgehen, werden wir meistens in der Lage sein, diese Konstanten und willkürlichen Funktionen zu bestimmen. Außerdem liefert die Ableitung der Bedingungen der dynamischen Möglichkeit immer ein Verfahren zur Bestimmung des Druckes und der Dichte der Flüssigkeit, die eine gegebene dynamisch mögliche Bewegung vollführt.

1. Die Helmholtzschen Sätze. Ehe wir eine kurze Darstellung der Ableitung der genannten Bedingungsgleichungen geben, wollen wir die notwendigen und hinreichenden Bedingungen betrachten, die für das Bestehen der beiden bekannten Theoreme von Helmholtz für Vektor-Röhren im Felde eines Vektors $\mathfrak{A}$ maßgebend sind.

Das erste Theorem von Helmholtz besteht bekanntlich darin, daß die auf einer Wirbellinie zu irgend einer Zeit befindlichen Flüssigkeitsteilchen auch in der ganzen nachfolgenden Zeit auf der Wirbellinie bleiben. Das zweite Theorem behauptet, daß die Intensität der Wirbelröhre sich mit der Zeit nicht ändert. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß die beiden Helmholtzschen Theoreme für die Vektorröhren oder Vektorlinien im Felde des Vektors $\mathfrak{A}$ bei der Geschwindigkeit $\mathfrak{B}$ gelten, sind zuerst von Zorawski[1]) und Bjerknes[2]) festgestellt worden; sie laufen auf die Erfüllung folgender Gleichung hinaus:

$$\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} + \operatorname{curl}\,[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] + \mathfrak{B}\operatorname{div}\mathfrak{A} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

wo $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ das Vektorprodukt der Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ bedeutet; die übrigen Bezeichnungen dürfen als bekannt vorausgesetzt werden (curl = rot). Wenn mit jedem Flüssigkeits-

[1]) Zorawski, Bulletin de l'Academie des Sciences de Cracovie, 1900, S. 335.

[2]) Bjerknes, l. c.

teilchen ein Vektor $\mathfrak{A}$ verbunden ist, so muß die Gl. (1) bestehen, damit für die von den $\mathfrak{A}$ gebildeten Vektorlinien die beiden Sätze gelten, die Helmholtz für $\mathfrak{A} = \text{curl}\, \mathfrak{B}$ (im Falle der inkompressiblen Flüssigkeit) gefunden hat.

Kinematisch sind beide Sätze von Helmholtz voneinander vollständig unabhängig, ja sogar noch mehr: dynamisch sind solche Bewegungen der kompressiblen Flüssigkeit möglich, bei denen das eine Theorem von Helmholtz besteht, das andere nicht.

Die linke Seite der Gl. (1) spielt eine große Rolle in den Fragen der Kinematik von Vektorröhren, die sich den Sätzen von Helmholtz nicht fügen, sowie in den Fragen, die sich auf die Bedingungen der dynamischen Möglichkeit der Bewegungen einer kompressiblen Flüssigkeit beziehen. Wir wollen die linke Seite der Gl. (1) durch das Symbol helm $\mathfrak{A}$ bezeichnen:

$$\text{helm}\, \mathfrak{A} = \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} + \text{curl}\, [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] + \mathfrak{B} \,\text{div}\, \mathfrak{A} \quad \ldots \ldots \quad (2).$$

Man gelangt sehr leicht zu dem Resultat, daß dieses Symbol folgende Eigenschaft besitzt:

$$\text{curl}\, \frac{d\mathfrak{B}}{dt} = \text{helm curl}\, \mathfrak{B} \quad \ldots \ldots \quad (3).$$

Aus dem Nachstehenden geht hervor, daß diese Eigenschaft es gestattet, beide Helmholtzschen Theoreme für eine inkompressible Flüssigkeit sogleich zu beweisen.

Indem wir mit ω das spezifische Volumen (den reziproken Wert der spezifischen Masse, $\omega = 1/\varrho$) und mit $\mathfrak{F}$ die äußere Kraft bezeichnen, die auf die Einheit der Masse der Flüssigkeit wirkt, dürfen wir die hydrodynamischen Gleichungen für eine kompressible Flüssigkeit folgendermaßen anschreiben[1]):

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = -\,\omega \,\text{grad}\, p + \mathfrak{F}, \quad \frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{dt} = \frac{d \ln \omega}{dt} = \text{div}\, \mathfrak{B} \quad \ldots \ldots \quad (4).$$

Betrachten wir nun $\mathfrak{F}$ als eine konservative Kraft ($\text{curl}\, \mathfrak{F} = 0$) und berücksichtigen wir gleichzeitig die Inkompressibilität der Flüssigkeit (ω = konst.), so können wir p aus Gl. (4) eliminieren, indem wir beiderseits in der ersten Gleichung den curl bilden. So erhalten wir folgende Gleichung:

$$\text{curl}\, \frac{d\mathfrak{B}}{dt} = \text{helm curl}\, \mathfrak{B} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (5).$$

Somit wären denn die beiden Helmholtzschen Theoreme für ω = konst. bewiesen.

2. Ableitung der ersten Bedingung. Wir gehen nun daran, die dynamische Möglichkeit der Bewegung einer kompressiblen Flüssigkeit zu untersuchen. Zu diesem Zwecke wollen wir die Vektoren $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ mittels folgender Gleichungen einführen:

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{F} - \frac{d\mathfrak{B}}{dt} = \omega \,\text{grad}\, p \quad \ldots \quad (6), \qquad \mathfrak{H} = -\,\text{curl}\, \mathfrak{G} = [\text{grad}\, p, \text{grad}\, \omega] \quad . \ (7);$$

Den ersten dieser Vektoren wollen wir nun der bekannten meteorologischen Bezeichnung nach den dynamischen Gradienten nennen, den zweiten in Anbetracht der Rolle, die er bei der Bildung von Wirbeln spielt, als den Turbulenzvektor bezeichnen.

Die Auflösung der ersten Gl. (4) in bezug auf grad p, ergibt nach (6):

$$\text{grad}\, p = \frac{\mathfrak{G}}{\omega} \quad \ldots \ldots \quad (8).$$

Wenn wir aus den Gl. (4) den Druck p eliminieren, erhalten wir mit Rücksicht auf (6) und (7) folgende Gleichungen zur Bestimmung von $\varphi = \lg \omega$, ohne welche es unmöglich wäre, ein p zu bestimmen, welches den Gl. (4) genügt:

$$[\mathfrak{G}, \text{grad}\, \varphi] = \mathfrak{H}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \text{div}\, \mathfrak{B} \quad \ldots \ldots \quad (9).$$

Genügt φ den Gl. (9), so kann auch p aus Gl. (8) bestimmt werden.

Die Gl. (9) liefern uns die erste Bedingung für die kinematischen Elemente, welche durch die Gleichung

$$(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}) = 0 \quad \ldots \ldots \quad (a)$$

ausgedrückt wird; das Symbol $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ bezeichnet das Skalarprodukt der Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. Die Gleichung (a) zeigt, daß der dynamische Gradient senkrecht zu seinem Wirbel ist und folglich zu denjenigen Vektoren gehört, die Prof. Joukowsky untordierbare Vektoren nennt. Die Bedingung (a) wollen wir die Bedingung der Untordierbarkeit nennen.

[1]) Vergl. z. B. R. v. Mises, Technische Hydromechanik, I, Leipzig 1914, § 2 und § 3; oder H. Lamb, Hydrodynamik, Leipzig 1907, § 6 und § 7.

3. Die zweite Bedingungsgleichung. Um die weiteren Bedingungen der dynamischen Möglichkeit der Bewegung einer kompressibeln Flüssigkeit zu erhalten, müssen wir die Größe μ in Betracht ziehen, die durch die Gleichung:

$$\mu = (\mathfrak{V}, \mathfrak{G}) = \omega\,(\mathfrak{V}, \operatorname{grad} p) = \omega\left(\frac{dp}{dt} - \frac{\partial p}{\partial t}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

bestimmt wird.

Diese Größe bedeutet die sekundliche Arbeit, die bei einer wirklichen Verschiebung von den Druckkräften geleistet wird. Unterscheidet sich diese sekundliche Arbeit von Null, so wollen wir solche Bewegungen normal nennen; ist aber $\mu = 0$, so bezeichnen wir die Bewegungen, die diese Eigenschaft aufweisen, als halbkonservativ. Im folgenden werden wir nur die normalen Bewegungen in Betracht ziehen; es muß jedoch bemerkt werden, daß die Untersuchung der halbkonservativen Bewegungen keine wesentlichen Schwierigkeiten aufweist.

Die Bedingung der Untordierbarkeit gestattet zu beweisen, daß in Fällen von normalen Bewegungen das Gleichungssystem (9) mit dem folgenden System gleichbedeutend ist.

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{b}\,\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \operatorname{grad} \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11),$$

wobei

$$\mathfrak{a} = \frac{[\mathfrak{H}, \mathfrak{V}] + \Theta \mathfrak{G}}{\mu}, \quad \mathfrak{b} = -\frac{\mathfrak{G}}{\mu}, \quad \Theta = \operatorname{div} \mathfrak{V} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

Um aus den Gl. (9) die Gl. (11) zu erhalten, genügt es, die beiden ersteren mit $-\mathfrak{V}$ bezw. mit $\mathfrak{G}$ vektoriell multiplizierten Gleichungen zu addieren; umgekehrt, um aus Gl. (11) die erste der Gl. (9) abzuleiten, muß man (11) vektoriell mit $\mathfrak{G}$ multiplizieren; um endlich die zweite Gl. (9) zu erhalten, muß man (11) skalar mit $\mathfrak{V}$ multiplizieren.

Wir wollen den Vektor $\mathfrak{a}$ das Turbomoment und den Vektor $\mathfrak{b}$ den reduzierten Gradient nennen.

Indem wir an beiden Seiten der Gl. (11) die Operation curl vollziehen, erhalten wir folgende Gleichung:

$$\mathfrak{c} + \mathfrak{d}\,\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13),$$

in welcher die Vektoren $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ durch folgende Gleichungen bestimmt werden:

$$\mathfrak{c} = \operatorname{curl} \mathfrak{a} + \left[\frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial t}, \mathfrak{b}\right], \qquad \mathfrak{d} = \operatorname{curl} \mathfrak{b} + \left[\frac{\partial \mathfrak{b}}{\partial t}, \mathfrak{b}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

Wenn wir diese beiden Vektoren durch dynamische Elemente ausdrücken, erhalten wir:

$$\mu^2\,\mathfrak{c} = -\,\omega\,\frac{\partial \omega}{\partial t}\left[\operatorname{grad} \frac{dp}{dt}, \operatorname{grad} p\right], \quad \mu^2\,\mathfrak{d} = \omega^2\left[\operatorname{grad} \frac{dp}{dt}, \operatorname{grad} p\right] \quad . \quad (15).$$

Der enge Zusammenhang dieser Vektoren mit der der Volumeinheit der kompressiblen Flüssigkeit zugeführten Wärmemenge gibt uns das Recht, sie als ersten bezw. zweiten thermischen Vektor zu bezeichnen.

Die Gl. (13) zeigt, daß die thermischen Vektoren folgender Relation genügen müssen:

$$[\mathfrak{c}, \mathfrak{d}] = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b),$$

mit anderen Worten: Es müssen die beiden thermischen Vektoren einander parallel sein. Die Relation (b) bedeutet einen weiteren Schritt auf dem Wege zur Bestimmung der Bedingungen der dynamischen Möglichkeit der Bewegung einer kompressiblen Flüssigkeit. Diese Relation (b) werden wir die thermische Bedingung nennen. Obgleich die thermische Bedingung scheinbar auf zwei Skalargleichungen zurückgeführt werden kann, ist tatsächlich die zweite Skalargleichung eine Folge der ersten sowie der Bedingung der Untordierbarkeit; auf diese Weise reduzieren sich die thermischen Bedingungen auf eine einzige Skalargleichung, die folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$(\mathfrak{V}, [\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}]) + \mu\,(\mathfrak{H}, \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{V}) - \left(\mathfrak{H}_1 + [\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{V}, \mathfrak{G}], \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial t} + \operatorname{grad} \mu\right) = 0 \quad (16),$$

wo $\mathfrak{H}_1 = \operatorname{helm} \mathfrak{H}$ ist.

4. Die weiteren Bedingungen. Die normalen Bewegungen einer kompressiblen Flüssigkeit zerfallen in zwei Klassen: 1. allgemeine normale Bewegung, wenn $\mathfrak{d}$ nicht null ist, und 2. spezielle normale Bewegung, wenn $\mathfrak{d} = 0$ ist. Wir wollen uns auf die Untersuchung der allgemeinen normalen Bewegung beschränken.

Führen wir durch nachfolgende Gleichungen den Skalar λ und den Vektor $\mathfrak{s}$ ein.

$$\mathfrak{c} + \lambda \mathfrak{d} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17), \qquad \mathfrak{s} = \mathfrak{a} + \lambda \mathfrak{b} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18).$$

In Anbetracht der Rolle, welche diese Größen bei der Bestimmung des spezifischen Volumens spielen, wollen wir sie Stereoskalar resp. Stereovektor nennen.

Die Gl. (13) und (11) gestatten es, φ durch folgende Gleichungen zu bestimmen:

$$\operatorname{grad} \varphi = \mathfrak{s}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19).$$

Um φ aus den Gl. (19) ableiten zu können, ist die Erfüllung folgender Bedingungen notwendig und hinreichend:

$$\operatorname{curl} \mathfrak{s} = 0, \qquad \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial t} = \operatorname{grad} \lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c).$$

Diese Bedingungen erscheinen gleichzeitig als Bedingungen der dynamischen Möglichkeit der Bewegung; wir wollen sie Volumbedingungen nennen. Eine einfache Berechnung zeigt, daß die erste Gl. (c) eine Folge der zweiten ist, so daß die Volumbedingungen nur drei skalare Gleichungen ergeben.

Die Bedingungen der dynamischen Möglichkeit der Bewegungen einer kompressiblen Flüssigkeit bestehen also: 1. in der Bedingung der Untordierbarkeit (Gl. (a)), 2. in der thermischen Bedingung (Gl. (b)) und 3. in den Volumbedingungen (Gl. (c)), im Ganzen in 5 skalaren Bedingungen. Sobald diese Bedingungen erfüllt sind, läßt sich φ aus der Gl. (19) bis auf eine additive willkürliche Konstante bestimmen (das bedeutet, daß in $\omega = e^{\varphi}$ noch eine willkürliche Konstante als Multiplikator auftreten wird und der Druck p wird aus Gl. (8) bis auf eine additive willkürliche Funktion der Zeit bestimmt.

Daraus läßt sich nach (19) und (8) leicht ersehen, daß ω und p durch folgende Gleichungen bestimmt werden:

$$\omega = \omega_o \, e^{\int (s_x \, dx + s_y \, dy + s_z \, dz + \lambda \, dt)}, \qquad p = \int \frac{G_x \, dx + G_y \, dy + G_z \, dz}{\omega} + p_o(t) \quad . \quad (20),$$

wo ω_o und $p_o(t)$ eine willkürliche Konstante und eine willkürliche Funktion der Zeit bedeuten. A_x, A_y, A_z sind die Komponenten des Vektors $\mathfrak{A}$ nach den Koordinatenachsen.

5. Beispiel der wagerechten Windbewegung. Um die praktische Anwendung der erwähnten Methoden klarzulegen, soll ein Beispiel angeführt werden. Nehmen wir an, daß die Bewegungen der Flüssigkeit durch folgende Gleichungen kinematisch gegeben sind:

$$u = 0, \qquad v = v(t, z), \qquad \omega = 0.$$

Diese Gleichungen entsprechen dem in der meteorologischen Praxis vorkommenden Falle eines horizontalen Windes, der seine Richtung mit der Höhe nicht ändert und nur eine geringe Richtungsveränderung im Zusammenhang mit der Aenderung der geographischen Koordinaten erfährt. Indem wir für die angegebene Bewegung die erforderlichen Vektoren zusammenstellen, erhalten wir:

$$G_x = 0, \; G_y = -\frac{\partial v}{dt}, \; G_z = -g; \qquad \mathfrak{H}_x = -\frac{\partial^2 v}{\partial t \, \partial z}, \; \mathfrak{H}_y = 0, \; \mathfrak{H}_z = 0;$$

$$a_x = 0, \quad a_y = 0, \quad a_z = \frac{\dfrac{\partial^2 v}{\partial t dz}}{\dfrac{\partial v}{dt}}; \qquad b_x = 0, \; b_y = -\frac{1}{v}, \; b_z = -\frac{g}{v \dfrac{\partial v}{\partial t}},$$

$$\mu = -v \frac{\partial v}{\partial t}; \quad \mu^2 c_x = v \left(\frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial^3 v}{\partial t^2 \, dz} - \frac{\partial^2 v}{d\, t^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t \, d z} \right), \quad \mu^2 c_y = 0, \quad \mu^2 c_z = 0,$$

$$\mu^2 d_x = g \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial v}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2, \qquad \mu^2 d_y = 0, \quad \mu^2 d_z = 0,$$

wo die Axe der z vertikal nach oben gerichtet ist und wo g die Größe der Schwerbeschleunigung bildet.

Aus den oben angeführten Gleichungen ersieht man, daß die Bedingung der Untordierbarkeit und die thermische Bedingung von selbst erfüllt werden. Die Volumbedingungen führen uns zu der folgenden Gleichung 3ter Ordnung, der die Funktion $v(t, z)$ genügen muß:

$$g \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{a}{2\beta} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial z} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial^3 v}{\partial z \, \partial t^2} \right) = \frac{\partial v}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad (21),$$

wo β eine willkürliche Konstante bedeutet.

Der Stereoskalar und der Stereovektor werden durch die Formeln:

$$s_x = 0, \quad s_y = \frac{2c}{g}, \quad s_z = \frac{2\beta + \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial z}}{\frac{\partial v}{\partial t}}, \quad \lambda = -\frac{2\beta}{g} v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

bestimmt. Hieraus folgt, daß, sobald v der Gl. (21) genügt, der Druck und das spezifische Volumen sich mit Hilfe von Quadraturen leicht aus den Gl. (22) und (20) bestimmen lassen.

Die Gl. (21) läßt eine Reihe spezieller Lösungen zu; eine davon entspricht z. B. dem Falle, daß ein Wind von bestimmter Stärke in einer gewissen Höhe sozusagen allmählich herabsinkt. In diesem Falle ist v eine Funktion von $z + nt$ (n konstant) und die Aufgabe kann mit Hilfe von Zylinderfunktionen mit gebrochenem Index gelöst werden. Es möge v durch die nachstehende Formel ausgedrückt werden:

$$v = -\frac{g}{2\beta} F(t + z).$$

Dann wird die Funktion $F(x)$ auf Grund der Gl. (21) folgendermaßen bestimmt sein:

$$F(x) = -\frac{2\beta^2}{g} \frac{1}{\beta_1 + \frac{2\beta^2}{g} x} - 2\sqrt{\beta_1^2 + \frac{2\beta^2}{g} x} \; \frac{Z'_{1/3}\left(\frac{g}{3\beta^2}\left(\beta_1 + \frac{2\beta^2}{g} x\right)^{3/2}\right)}{Z_{1/3}\left(\frac{g}{3\beta^2}\left(\beta_1 + \frac{2\beta^2}{g} x\right)^{3/2}\right)} - \alpha,$$

α, β und β_1 bedeuten gewisse Konstanten; Z_n aber bedeutet die allgemeine Lösung der Besselschen Gleichung mit dem Index n[1]).

Mit Hilfe der Funktion F werden der Druck und das spezifische Volumen nach (20) durch die nachstehenden Gleichungen bestimmt.

$$\omega = \omega_0 \, e^{\frac{2c}{g} y + \int_0^{t+z} F(\tau)\, d\tau + \alpha z}$$

$$p = -\frac{g^2}{4\beta^2} \frac{F'(t + z)}{\omega} + p_0(t).$$

ω_0 und α sind Konstanten; dagegen ist $p_0(t)$ eine willkürliche Funktion der Zeit[2]).

Der Mangel an Raum gestattet uns nicht, noch einige Fälle der Bewegung einer kompressiblen Flüssigkeit anzugeben; sie können jedoch alle mit Hilfe der oben besprochenen Methode studiert werden. 301

Petersburg, November 1922.

Versuche über die Viskosität des Wassers in sehr engen Durchgangsquerschnitten.

Von K. v. TERZAGHI in Konstantinopel.

Die Beziehung, die zwischen der Durchlässigkeit und dem Porenvolumen eines Sandes von gegebener Korngröße besteht, kommt in der recht verwickelten, von Slichter[3]) auf theoretischem Weg abgeleiteten Formel zum Ausdruck. Diese Formel gilt nur für gleichkörnige Sande mit einem maximalen Porenvolumen von 47,6 vH. Um zu einem einfachen und allgemein gültigen Ausdruck zu gelangen, stellte der Verfasser folgende Betrachtung an:

Die weitesten Stellen der in einer Sandmasse vorhandenen Wasserwege haben mindestens den fünffachen Querschnitt der engsten. Die mittlere Strömungsgeschwindigkeit beträgt demnach in den Schlauchverengungen das fünffache der in den Ausweitungen der Wasserwege herrschenden Strömungsgeschwindigkeit und der Druckhöhenverlust pro Längeneinheit der engsten Stellen der Wasserwege beläuft sich auf mehr als das fünfundzwanzigfache von jenem pro Längeneinheit der Ausweitungen. Infolge dieses Umstandes

---

[1]) Siehe z. B. Jahnke und Emde, Funktionentafeln S. 167.

[2]) Ueber die erwähnte Bewegung s. meine Notiz in Comptes Rendus, Paris 1916, Bd. 163, S. 219.

[3]) Siehe Forchheimer, Hydraulik, S. 427.

gleicht die Strömung des Wassers durch eine Sandschicht der Strömung des Wassers durch eine Reihe parallel gestellter Siebe. Führt man diesen Gedankengang rechnerisch durch, so erhält man für die Durchlässigkeitsziffer des Sandes, d. h. für die Wassermenge, die beim Druckgefälle 1 pro Zeiteinheit durch die Flächeneinheit einer Niveaufläche hindurchtritt, den Ausdruck

$$k = \left(\frac{C}{\eta_0}\right) \cdot \left(\frac{\eta_0}{\eta_t}\right) \cdot \left(\frac{n - n_0}{\sqrt[3]{1 - n_0}}\right)^2 d^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

worin n das Porenvolumen, η_0 die Viskositätsziffer des Wassers bei 10^0 C und η_t die Viskositätsziffer des Wassers bei einer Temperatur t bedeuten. Die Konstante $n_0 = 0{,}13$ ist das auf empirischem Weg ermittelte Porenvolumen, bei welchem die Durchlässigkeit des Sandes Null wird. Diese Ziffer ist unabhängig von der Kornform und der Kornbeschaffenheit.

$\frac{C}{\eta_0}$ ist ein Koeffizient, dessen Wert etwa zwischen den extremen Grenzen von 800 für Sande mit glatten, abgerundeten Körnern und 460 für Sande mit unregelmäßig geformten, rauhen Körnern liegt. Vom Ungleichförmigkeitsgrad scheint sein Wert nur wenig beeinflußt zu werden. Der Buchstabe d bedeutet den wirksamen Korndurchmesser in cm nach der Definition Allen Hazens und k die Durchlässigkeitsziffer in $\mathrm{cm/sec^{-1}}$.

In Abb. 1 ist der Verlauf der Funktion (Formel (1)) durch die Kurve C_s dargestellt. Die Slichtersche Formel gilt für Porenvolumina von 26 vH bis 47,6 vH, Punkt S_0 bis Punkt S_u auf Kurve C_s, Abb. 1 und liefert innerhalb dieses Bereiches nahezu dieselben Werte wie die Formel (1). Diese Werte stimmen ausnahmslos zufriedenstellend mit den Ergebnissen der zahlreichen Versuche überein, welche der Verfasser beim Studium der zwischen Porenvolumen und Durchlässigkeit bestehenden Beziehungen mit Sanden von sehr verschiedenartiger Beschaffenheit vorgenommen hat.

1. Die Beziehungen zwischen der Porenziffer [1]) und der Durchlässigkeit der Tone. Für die aus vorwiegend schuppenförmigen Teilchen bestehenden Lehme und Tone trifft der Vergleich zwischen dem Filterprozeß und der Strömung durch parallel gestellte Siebe nicht zu. Unter dem Einfluß einer Belastung stellen sich die Schuppen mehr oder weniger senkrecht zur Druckrichtung ein. Man hat daher in verschiedenen Richtungen verschiedene Durchlässigkeit zu erwarten. Ferner haben die Kanäle nicht einen gedrungenen, sondern einen schlitzförmigen Querschnitt. Die Menge des bei gegebenem Gefälle durch einen Kanal strömenden Wassers nimmt infolgedessen bei gegebener Schlitzbreite nicht mit dem Quadrat, sondern mit der dritten Potenz der Querschnittsfläche zu. Die Kanäle winden sich zwischen den blattartig aneinander liegenden Schuppen hindurch. Ihre Länge wächst daher in geradem Verhältnis mit der Zahl der in der Volumeneinheit enthaltenen Teilchen. Es ist endlich, infolge der wechselnden Weite der Wasserwege ebenso wie beim Sand zu erwarten, daß sich die Wasserbahnen bereits bei einer Porenziffer $\varepsilon_0 > 0$ schließen. Unter diesen Voraussetzungen nimmt die Länge der Wasserwege pro Längeneinheit der Strömungsrichtung in geradem Verhältnis mit $\frac{1}{1+\varepsilon}$, der Querschnitt der Wasserwege in geradem Verhältnis mit $\varepsilon - \varepsilon_0$ zu und man erhält für die Durchlässigkeitsziffer k den Ausdruck

$$k = \left(\frac{C}{\eta_0}\right) \cdot \left(\frac{\eta_0}{\eta_t}\right) \cdot (\varepsilon - \varepsilon_0)^3 (1 + \varepsilon) \cdot d^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Die Buchstaben haben die bereits erläuterte Bedeutung.

Um die Brauchbarkeit der Formel (2) zu überprüfen, wurden die für drei verschiedene Bodenarten I (sehr fetter gelber Ton mit 55 vH Kolloidschlamm), II (gelber Residual-Ton mit 28,3 vH Kolloidschlamm) und III (sandiger Meeresschlamm mit 12,7 vH Kolloidgehalt) ermittelten Durchlässigkeitsziffern [2]) in Abb. 1 eingetragen. Sodann wurden

[1]) Als Porenziffer ε bezeichnet der Verfasser den Quotienten aus dem Rauminhalt der Poren und jenem der Trockensubstanz. Zwischen der Porenziffer ε und dem Porenvolumen n besteht die Beziehung

$$n = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}.$$

[2]) Im Jahre 1919 konstruierte der Verfasser einen Apparat zur direkten Bestimmung der Durchlässigkeitsziffer bindiger Böden, welche unter konstantem Druck stehen. Eine Auswahl der mit Hilfe dieses Apparates ermittelten Durchlässigkeitsziffern wurde im Aufsatz »Die physikalischen Grundlagen des technisch-geologischen Gutachtens« (Ztschr. des österr. Ing.- und Arch.-Ver., Sept. 1921, 10. Abschn.,

aus den Punktserien I, II und III jene Punkte herausgegriffen, welche der größten Porenziffer entsprechen (die außerhalb der Bildfläche der Abb. 1 gelegenen Punkte 1, 5 und 9) und die Konstanten in Formel (2) derart bestimmt, daß die Kurven durch die gewählten Punkte hindurchgehen. Für ε_0 wurde in Formel (2) der für den Sand ermittelte Wert 0,15 eingeführt. Auf diese Weise wurden die in Abb. 1 gestrichelt eingetragenen Kurven C_I, C_{II} und C_{III} erhalten. Für die weichplastische Konsistenzform ist die Uebereinstimmung zwischen berechneten und beobachteten Werten eine gute. Unterhalb der in der Abbildung mit P_I, P_{II} und P_{III} bezeichneten Plastizitätsgrenzen[1]) ergeben sich jedoch so gewaltige Abweichungen zwischen den gemessenen und berechneten Werten von k, daß es gewagt erschien, die Differenzen lediglich auf die Ungenauigkeit der geometrischen Voraussetzungen zurückzuführen, auf welche die Ableitung der Formel 2 gegründet wurde[2]). So beträgt beispielsweise k für den Ton II bei $\varepsilon = 0{,}600$ bloß 9 vH des nach Formel (2) berechneten Wertes (siehe Abb. 1b, Lage der Punkte a bis e in bezug auf die gestrichelte Kurve C_{II}). Es ist obendrein auffallend, daß die bedeutenden Abweichungen zwischen Messung und Rechnung durchweg erst an der Grenze der halbfesten Konsistenzform auftreten, ob nun diese Grenze bei einer Porenziffer von 0,9 oder von 0,3 liegt. Diese Grenze entspricht einer um so größeren Porenziffer, je kleiner der wirksame Korndurchmesser ist, d. h. die Konsistenzgrenze entspricht einer ganz bestimmten, von der Korngröße unabhängigen Weite der Wasserwege. Unter diesen Umständen sah sich der Verfasser zu dem Schluß gedrängt, daß ein kausaler Zusammenhang bestehen müsse zwischen dem Versagen der Formel (2) und der von

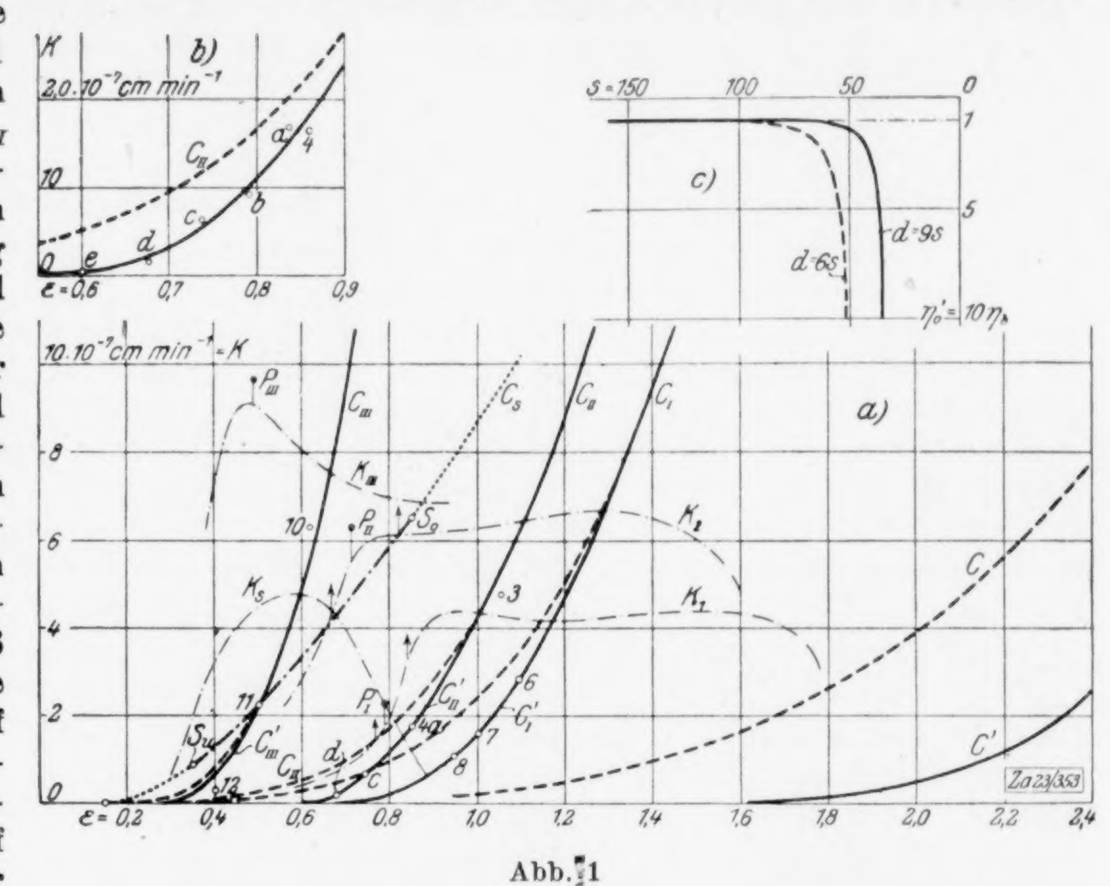


Abb. 1

Tabelle V) veröffentlicht. In Tabelle V dieser Arbeit, Serie Nr. 2, Wert von k für einen Druck von 0,75 kg/cm², soll es heißen $4{,}73 . 10^{-7}$ anstatt $3{,}73 . 10^{-7}$. Nachdem die direkte Methode bei der Bestimmung von Durchlässigkeitsziffern mit Werten von weniger als $2 . 10^{-7}$ cm min^{-1} versagte, arbeitete der Verfasser im Jahre 1923 eine indirekte Methode aus, mit deren Hilfe die Durchlässigkeitsziffer aus dem Verlauf der hydrodynamischen Spannungserscheinungen ermittelt wird (Die Berechnung der Durchlässigkeitsziffer des Tones aus dem Verlauf der hydrodynamischen Spannungserscheinungen. Sitzungsberichte der Wiener Akademie der Wissenschaften. Math.-Nat. Klasse, 3. u. 4 Heft, 1923.) Als hydrodynamische Spannungserscheinungen bezeichnet der Verfasser die Verzögerungen, welche die im Ton durch eine Außenkraft hervorgerufenen Spannungen durch den Widerstand gegen das Entweichen des ausgequetschten Porenwassers erfahren. In Abb. 1b wurden die Punkte a bis e mit Hilfe der indirekten und der Punkt 4 mit Hilfe der älteren, direkten Methode ermittelt.

[1]) Als Plastizitätsgrenze bezeichnet Atterberg den Wassergehalt, bei welchem sich der Ton eben noch zu dünnen Drähten ausrollen läßt. Siehe A. Atterberg, Die Plastizität der Tone, Internationale Mitteilungen für Bodenkunde 1911, Bd. I sowie

Die Konsistenz und Bindigkeit der Böden 1912, Bd. II.

[2]) Bei der Wahl der geometrischen Voraussetzungen mußte man allerdings die Natur ziemlich weitgehend schematisieren. Es hat sich jedoch gezeigt, daß die verschiedenartigsten geometrischen Voraussetzungen zu Kurven von ähnlicher Gestalt führen, falls diese Voraussetzungen auch nur halbwegs den zwischen der Kornform, der Porenziffer und den Abmessungen der Wasserbahnen bestehenden Beziehungen Rechnung tragen. So lieferte z. B. die oben angedeutete Siebhypothese für den Sand nahezu das gleiche Ergebnis, wie das auf ganz andern Voraussetzungen fußende Verfahren Slichters. Infolge dieses Umstandes beschreibt die Formel 2 die zwischen k und ε herrschende Beziehung in zutreffenderer Weise, als man nach flüchtiger Prüfung ihrer Grundlagen anzunehmen geneigt ist.

der Korngröße unabhängigen, kritischen Weite der Wasserwege, bei der die Abweichungen fühlbar werden. Dieser Zusammenhang kann nur darin gesucht werden, daß die Viskosität des Wassers unter dem Einfluß der Molekularkräfte der festen Teilchen zunimmt, sobald die Weite der schlitzartigen Durchfluß-Oeffnungen unter ein bestimmtes Maß sinkt. Um diesem Einfluß in der Formel (2) Rechnung zu tragen, wurde an Stelle des Koeffizienten $\left(\frac{C}{\eta_0}\right)$ der Ausdruck

$$\left(\frac{C}{\eta_0'}\right) = \frac{C}{\eta_0\left(1 + \frac{c_1}{s^x}\right)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

eingeführt, worin s die halbe Weite der schlitzförmigen Wasserwege und c_1 sowie x Konstante bedeuten, deren Wert auf empirischem Weg zu ermitteln ist. Die wirksame Schlitzweite nimmt im Sinne der Ueberlegungen, die zu der Formel (2) geführt haben, in geradem Verhältnis mit $\varepsilon - \varepsilon_0$ ab. Bei verschiedenen Materialien mit gleicher Porenziffer verhalten sich die Schlitzweiten wie die wirksamen Durchmesser d, daher $s = \alpha\, d\,(\varepsilon - \varepsilon_0)$, worin α eine Konstante bedeutet. Mit diesem Wert geht der Ausdruck (3) über in

$$\frac{C}{\eta_0\left[1 + \frac{c_1}{\alpha^x\, d^x\,(\varepsilon - \varepsilon_0)^x}\right]} = \frac{C}{\eta_0\left[1 + \frac{c}{d^x\,(\varepsilon - \varepsilon_0)^x}\right]}$$

und die Formel (2) wird zu

$$k = \frac{C}{\eta_0} \cdot \frac{\eta_0}{\eta_t} \cdot \frac{(\varepsilon - 0{,}15)^3\,(1 + \varepsilon)}{1 + \frac{c}{d^x} \cdot \frac{1}{(\varepsilon - 0{,}15)^x}} \cdot d^2 = \frac{C}{\eta_0} \cdot \frac{\eta_0}{\eta_t} \cdot \frac{(\varepsilon - 0{,}15)^{x+3}\,(1 + \varepsilon)}{(\varepsilon - 0{,}15)^x + \frac{c}{d^x}} \cdot d^2 \quad . \; . \; . \quad (4).$$

Die für jede der untersuchten Tonsorten unabhängig durchgeführte Verarbeitung der Versuchsergebnisse lieferte für x Werte, welche innerhalb der bemerkenswert engen Grenzen von 7,7 und 9,0 liegen und im Mittel $x = 8{,}0$ betragen. Für den Ton Nr. II ergab sich

$$k = 3{,}34 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{\eta_0}{\eta_t} \cdot \frac{(\varepsilon - 0{,}15)^{11}\,(1 + \varepsilon)}{(\varepsilon - 0{,}15)^8 + 0{,}0166} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5).$$

Sämtliche Punkte (1 bis 4 und a bis e) der Punktserie II liegen in der nächsten Nachbarschaft der durch Formel (5) festgelegten Kurve C_{II}' (siehe Abb. 1a und b). Für den außerhalb der Bildfläche gelegenen Punkt 1 (Abseisse $\varepsilon = 1{,}90$) ergab der Versuch $k = 45{,}7 \cdot 10^{-7}$ und die Formel (5) $k = 54{,}0 \cdot 10^{-7}$ cm/sec^{-1}. Die Formel (5) scheint daher allen maßgebenden Faktoren in angemessener Weise Rechnung zu tragen. Die Punkte 1 bis 4 der Serie I stellen Ergebnisse der direkten Methode zur Bestimmung der Durchlässigkeitsziffer dar, während die Werte von k für die Punkte a bis e durch die bereits erwähnte indirekte Methode geliefert wurden. Das Punktpaar 4 bis a, Abb. 1b, gestattet die Beurteilung des Grades der Uebereinstimmung zwischen den Ergebnissen der voneinander unabhängigen Verfahren.

Durch Formel (4), mit $x = 8$ und $\frac{c}{d^x} = 0{,}0166$, ist die Beziehung zwischen dem wirksamen Korndurchmesser d, der Porenziffer ε und der Durchlässigkeitsziffer k für Tone mit angenähert gleicher Kornbeschaffenheit eindeutig festgelegt. Ermittelt man im Versuchsweg für einen solchen Ton einen einzigen Punkt seiner Schaulinie C' und bestimmt in Formel (4) den Wert von d derart, daß die durch Formel (4) festgelegte Kurve durch diesen Punkt hindurchgeht, so müssen, falls die Formel (4) richtig ist, auch alle anderen Punkte auf dieser Kurve liegen. Dieser Schluß wird durch die Erfahrung bestätigt. Aus der Punktserie III wurde der Punkt 6 herausgegriffen. Das oben angedeutete Verfahren führte zu dem Ergebnis, daß die wirksame Korngröße des Materiales I um 24 vH kleiner sei als jene des Materiales II. Die durch Formel (4) gelieferte Kurve ist in Abb. 1a als C_I' bezeichnet und geht tatsächlich durch die beiden anderen, auf experimentellem Weg ermittelten Punkte 7 und 8 hindurch. Für den außerhalb der Bildfläche gelegenen Punkt 5 der Serie I ($\varepsilon = 1{,}97$) lieferte der Versuch $k = 40{,}0 \cdot 10^{-7}$ cm/min^{-1}. Formel (4) ergab für $\varepsilon = 1{,}97$ den Wert $k = 35{,}0 \cdot 10^{-7}$ cm/min^{-1}. Weniger gut ist die Uebereinstimmung für das Material III (Punkte 10, 11 und 12, Kurven C_{III} und C_{III}', Abb. 1a), denn dieses Material kann bei seinem sehr geringen Schlammgehalt und dem Vorwiegen des Sandes nicht mehr als Ton bezeichnet werden und besitzt keine ausgesprochene Plastizität.

2. Die Viskosität des Wassers im kapillaren Schlitz. Um eine Vorstellung von der Beziehung zwischen der Viskosität und der Schlitzweite zu bekommen, wurde die mittlere Weite der Wasserwege eingeschätzt, bei welcher die Zunahme der Viskosität des Wassers im durchströmten Ton in Erscheinung tritt. Die wirksame Korngröße des Tones II wurde auf Grund der Ergebnisse der Schlämmanalyse an die Grenze zwischen den Bereichen des Grobschlammes und des Feinschlammes verlegt ($d = 0{,}00006$ cm). Die Korngröße gibt die unter dem Mikroskop gemessene mittlere Breite der flachen Seiten der Schuppen an. Die halbe mittlere Weite s der Wasserwege dürfte bei einer Porenziffer von $\varepsilon = 1{,}00$ (Porenvolumen 50 vH) etwa zwischen den Grenzen $^1/_6\, d$ und $^1/_9\, d$ liegen, daher $d = 6s$ bis $d = 9s$. Mit diesen Werten erhält man auf Grund der oben mitgeteilten Formeln für die wahre Viskosität des Wassers die Werte

$$\eta_0' = \eta_0 \left(1 + \frac{6{,}02 \cdot 10^{-42}}{s^8}\right) \text{ bezw.}$$

$$\eta_0' = \eta_0 \left(1 + \frac{2{,}42 \cdot 10^{-43}}{s^8}\right),$$

worin die halbe Schlitzweite s in cm anzugeben ist. In Abb. 1c wurde die Viskosität η_0' für $d = 6s$ und $d = 9s$ als Funktion der halben Spaltweite aufgetragen. Bei Spalten mit einer halben Weite von 50 $\mu\mu$ ist die Zunahme der Viskositätsziffer bereits merkbar und nimmt die Viskositätsziffer mit weiterhin abnehmender Spaltweite rapid zu. 50 $\mu\mu$ ist nach Quincke die Entfernung, bis zu welcher die Molekularkräfte des Glases durch ein Silberplättchen hindurch auf Wassermoleküle wirken können.

Ob und in welchem Grad die in sehr engen Kapillaren auftretende Zunahme der Viskosität durch die Temperatur beeinflußt wird, läßt sich derzeit noch nicht mit Sicherheit beurteilen. Doch deuten die bei den Filterversuchen gemachten Beobachtungen darauf hin, daß der Faktor $1 + \frac{c}{s^8}$ in Gl. (3) von der Temperatur ziemlich unabhängig sei. Ganz offen ist hingegen die Frage, ob die Gl. (3) lediglich für Schlitze gilt, oder ob die Zunahme der Viskosität auch in der Nachbarschaft freier Wände stattfindet.

3. Der Zusammenhang zwischen der Zunahme der Viskosität des Wassers und den physikalischen Eigenschaften des Tones. Die Versuche haben übereinstimmend gezeigt, daß die Plastizitätsgrenze tonreicher Materialien mit jener Porenziffer identisch ist, bei welcher die Viskosität des Wassers in den engeren Stellen der Wasserwege auf ein Vielfaches ihres normalen Wertes steigt. An der Plastizitätsgrenze hört demnach das Porenwasser des Tones auf, homogen zu sein. Diese Erkenntnis zeigt das Wesen der Plastizitätsgrenze in neuem Licht und macht es begreiflich, wieso das Material nach Unterschreitung der Plastizitätsgrenze unvermittelt brüchig wird.

Es lag ferner nahe, zu vermuten, daß die unterhalb der Plastizitätsgrenze einsetzende molekulare Bindung des Wassers auch die Verdunstungsgeschwindigkeit beeinflusse. Um die Richtigkeit dieser Vermutung zu überprüfen, wurde die Geschwindigkeit ermittelt, mit welcher das Wasser an einer freien Wasseroberfläche, sowie an der Oberfläche von Lehm und Tonprismen verdunstet. Das Ergebnis ist in Abb. 2 graphisch dargestellt. Die strichpunktierte Gerade mit den Ordinaten 1,00 gibt die an einer freien Wasseroberfläche auftretende Verdunstungsgeschwindigkeit und die Kurven C_{II}, C_{III} und C_{IV} die Beziehung zwischen Porenziffer und Verdunstungsgeschwindigkeit für die Materialien II, III (Abb. 1) und IV

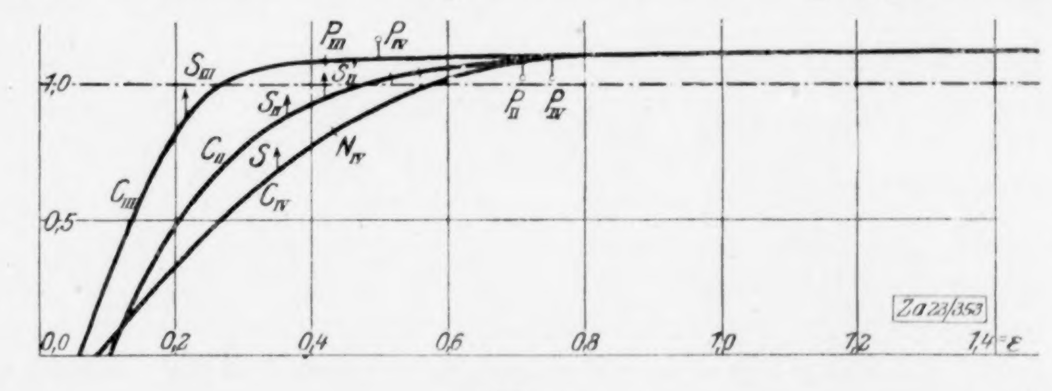


Abb. 2

(einem blauen marinen Ton mit großer Schwellziffer[1]) und einem Kolloidschlammgehalt von 41,6 vH) an. Die Schaulinien C_{II} für einen weichplastisch ($\varepsilon_0 = 1{,}47$)

[1]) Terzaghi, Die Beziehungen zwischen Elastizität und Innendruck, Sitzungsberichte der Wiener Akademie der Wissenschaften. Math. Nat. Klasse. 1923.

und einen zähplastisch ($\varepsilon_0 = 0,8$)[1]) angemachten Ton II erwiesen sich als identisch, während die mit S_{II} bezw. S_{II}' bezeichneten Schrumpfgrenzen sich nicht miteinander decken. Bis zu der mit P_{II}, bezw. P_{III} und P_{IV} bezeichneten Plastizitätsgrenze ist die Verdunstungsgeschwindigkeit an der Oberfläche sämtlicher Prismen von der Porenziffer ε unabhängig und beträgt etwa das 1,1-fache der Verdunstungsgeschwindigkeit für eine freie Wasseroberfläche. Nach Unterschreitung der Plastizitätsgrenze nimmt, wie erwartet wurde, die Verdunstungsgeschwindigkeit ab, trotzdem sich der Wasserspiegel des Porenwassers erst nach Unterschreitung der den Punkten N entsprechenden Porenziffer in das Innere der Probekörper zurückzieht. Die der Zunahme der Viskosität zugrundeliegende molekulare Bindung äußert sich demnach in einer Abnahme der Verdunstungsgeschwindigkeit.

Auf Grund der bisher mitgeteilten Tatsachen müßte es möglich sein, aus der Lage der Plastizitätsgrenze die Größe des wirksamen Korndurchmessers einzuschätzen. Nun liegt die Plastizitätsgrenze der Kolloidschlamme etwa zwischen den extremen Werten von $\varepsilon = 0,63$ (Grobschlamm des Barium-Sulfates) und $\varepsilon = 2,40$ (Feinschlamm des Hämatites, nach Atterberg[2]). Dem oberen Grenzwert $\varepsilon = 2,40$ entspricht in Abb. 1a die mit Hilfe der Gl. (4) berechnete Kurve C'. Aus den angegebenen Grenzwerten wäre zu schließen, daß sich der wirksame Korndurchmesser des gröbsten, eben noch plastischen Materiales bloß auf das fünffache des wirksamen Korndurchmessers des feinstkörnigen beliefe. Das ist selbstverständlich nicht der Fall und die Ursache der geringen Differenz zwischen den extremen Plastizitätsgrenzen ist in dem Umstand zu suchen, daß ein Sediment mit einer Porenziffer von mehr als $\varepsilon = 2,00$ (Porenvolumen 66,5 vH) nicht Einzelkorn-, sondern Wabenstruktur besitzt. Verfasser fand, daß für derart locker gelagerte Sedimente sowohl die angegebene Gleichung als auch das Gesetz von Darcy die Gültigkeit verlieren. Die Ursache liegt an dem Umstand, daß der beim Filtern auftretende Strömungsdruck in einem Sediment mit Wabenstruktur sowohl elastische als auch bleibende Strukturveränderungen hervorruft und die Durchlässigkeitsziffer des Materiales ist daher ebensosehr vom Gefälle abhängig, wie die eines dünnwandigen Gummischlauches, der sich ausdehnt, sobald er von Wasser durchströmt wird.

Die Ordinaten der Kurven K_I, K_{II}, K_{III} und K_s in Abb. 1a geben für jede Porenziffer ε die Produkte aus der Durchlässigkeitsziffer k und dem Flächendruck p_s an, der erforderlich ist, um das Sediment aus dem Zustand lockerster Lagerung bis auf die Porenziffer ε zu verdichten. Dieses Produkt ist für Lehme und Tone im Bereich der plastischen Konsistenzform nahezu konstant und nimmt im Bereich der halbfesten Konsistenzform (jenseits der in Abb. 1a mit P_I bezw. P_{II} und P_{III} bezeichneten Plastizitätsgrenzen) rapid ab[3]). Die für den Bereich der plastischen Konsistenzform gültige Konstanz des Produktes $k\,p_s$ leistet bei der mathematischen Behandlung der im Ton auftretenden hydrodynamischen Spannungserscheinungen wertvolle Dienste.

Der Verfasser hat gezeigt, daß auch die Strömung des Wassers durch Tone in der halbfesten Konsistenzform dem Gesetz von Darcy gehorcht[4]). Nachdem die Viskosität des Wassers in diesem Fall bereits ein Vielfaches der normalen Viskosität beträgt, kann man schließen, daß die Zunahme der Viskosität die Gültigkeit des Gesetzes von Darcy nicht aufhebt.

Die Berechnung des Maximalwertes p_k' des auf einen Tonwürfel wirkenden Kapillardruckes aus der Oberflächenspannung des Wassers hat wesentlich kleinere Werte ergeben, als die aus den Festigkeitsziffern der Würfel berechneten Drücke[5]). Aus dieser Tatsache scheint hervorzugehen, daß die Oberflächenspannung des Wassers mit der Viskosität zunimmt.

---

[1]) Bei der Bezeichnung der Konsistenzform bedient sich der Verfasser der Atterbergschen Bezeichnungsweise. Siehe A. Atterberg, Die Konsistenz und Bindigkeit der Böden. Internationale Mitteilungen für Bodenkunde. 1912, Bd. II, Heft 2/3.

[2]) A. Atterberg. Die Plastizität und Bindigkeit liefernden Bestandteile der Tone. Internationale Mitteilungen für Bodenkunde, 1913.

[3]) Der Wert dieser Produkte beläuft sich für die plastische Konsistenzform der Materialien I, II und III, (Abb. 1) auf 110 bezw. 158 und 800 $g/cm^{-1}/Jahr^{-1}$. Der Ordinatenmaßstab der Kurven K_I und K_{II} ist in Abb. 1a viermal so groß als jener der Kurve K_{III}.

[4]) Terzaghi, Die Berechnung der Durchlässigkeitsziffer des Tones aus dem Verlauf der hydrodynamischen Spannungserscheinungen. Sitzungsberichte der Wiener Akademie der Wissenschaften. Math. Nat. Klasse. 1923.

[5]) Vergl. Anmerkung auf S. 111.

Zusammenfassung. Die zwischen dem Porenvolumen und der Durchlässigkeitsziffer eines körnigen Materiales bestehende Beziehung wird durch Gleichungen ausgedrückt. Für den Sand stimmt die Gleichung mit den Beobachtungsergebnissen gut überein; bei den Tonen beschränkt sich die Uebereinstimmung zwischen Messung und Rechnung auf die weichplastische Konsistenzform, während sich im Bereich der Plastizitätsgrenze sehr bedeutende Differenzen ergeben. Die Art der Abweichungen und die Umstände, unter denen sie auftreten, führen zu dem Schluß, daß die Viskosität des Wassers rasch zunimmt, sobald die Weite einer schlitzförmigen Wasserbahn unter einen Wert von der Größenordnung 50 $\mu\mu$ sinkt. Durch Berücksichtigung dieses Umstandes in der für die Durchlässigkeitsziffer des Tones abgeleiteten Formel wird die Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung hergestellt.

Die Plastizitätsgrenze deckt sich bei den Tonen mit dem Stadium, da die Viskosität des Wassers bei abnehmender Weite der Wasserbahnen in den engsten Stellen der Porenschläuche auf ein Vielfaches der normalen Viskosität des Wassers ansteigt. Die molekulare Bindung des Wassers verrät sich in einer Abnahme der Verdunstungsgeschwindigkeit, sobald der Wassergehalt des Tones unter die Plastizitätsgrenze sinkt. Ein Vergleich zwischen den Durchlässigkeitsziffern von Sanden und Tonen mit gleichem wirksamem Korndurchmesser liefert neuerdings einen Beweis für die Schuppenstruktur des Tones. Die Zunahme der Viskosität des Wassers in sehr engen Kapillaren hebt die Gültigkeit des Gesetzes von Darcy nicht auf. 325

Energieübertragung durch schwingende Flüssigkeitssäulen.

Von **PAUL v. VÁGŐ** in Budapest.

In der Lehre von den Wasserkraftmaschinen pflegt man zumeist die Flüssigkeiten als unzusammendrückbar anzusehen. Die Konstante der volumetrischen Deformation ist zwar für die meisten Flüssigkeiten schon längst bekannt, doch hat ihr geringer Wert die übliche Auffassung von der Unzusammendrückbarkeit nur gestützt. Unter solchen Umständen konnte die Erkenntnis, daß die Elastizität der Flüssigkeiten zur Uebertragung mechanischer Arbeit zweckentsprechend verwendet werden könnte, erst verhältnismäßig spät durchdringen.

Die Vorstellung von der Unzusammendrückbarkeit hat sich für die Praxis zum erstenmal bei der Berechnung des Wasserstoßes, der beim plötzlichen Abschluß einer langen Turbinenleitung auftritt, als unhaltbar erwiesen. Seit der grundlegenden Arbeit von L. Alliévi[1]) (1903) gilt es als erwiesen, daß die Druckveränderung einer in einer langen Rohrleitung strömenden und plötzlich zum Stillstande gebrachten Flüssigkeitssäule eine aus der Elastizität der Rohrwandungen und der der Flüssigkeit resultierende Schwingungserscheinung ist, die sich in der Längsrichtung des Rohres nahezu mit Unterwasser-Schallgeschwindigkeit ausbreitet. Die Verwendung dieser elastischen Schwingungen für hydromotorische Zwecke eröffnet seitdem ein neues Gebiet in der Hydraulik und zwar verdanken wir die praktische Verwirklichung dieses Gedankens meines Wissens G. Constantinesco, der bei der Ausführung seiner grundlegenden ersten Patente[2]) durch W. Haddon beziehungsweise durch die Fa. W. H. Dorman & Co. Ltd. Stafford, England, unterstützt wurde.

In den bisherigen Veröffentlichungen über die neuen, durch Constantinesco und Haddon erfundenen Motoren[3]) sind jedoch die physikalischen Grundlagen nicht hinreichend geklärt worden. Dieser Umstand veranlaßt mich, im folgenden die Hydrodynamik der Wechselstrom-Kraftübertragung zu entwickeln und bei dieser Gelegenheit die bereits durch Constantinesco erkannte Analogie nachzuweisen, die zwischen den hydrodynamischen und elektrodynamischen Erscheinungen besteht.

1. Fortpflanzung der Druckwellen nach Alliévi. Ein wagerechtes, durch Flüssigkeit vollständig gefülltes Rohr von der Länge l, dem lichten Durchmesser D und der Wanddicke d sei an dem einen Ende durch die Querwand F, an dem anderen Ende

[1]) Deutsche Ausgabe bearbeitet von R. Dubs und V. Bataillard, Allgemeine Theorie über die veränderliche Bewegung des Wassers in Leitungen. Berlin, Springer, 1909.

[2]) Siehe Brit. Pat.-Schrift 5152 bzw. 9092 v. Jahre 1913: Improvements in hydraulic Transmission.

[3]) Bulletin Technique du Bureau Veritas, April 1920; Zeitschr. Ver. deutsch. Ing. 1921, S. 500.

dagegen durch einen beweglichen Kolben K verschlossen, Abb. 1. Wir stellen uns die Aufgabe, den Flüssigkeitsdruck p und die Geschwindigkeit zu einer beliebigen Zeit und in einem beliebigen Querschnitt des Rohres für den Fall zu bestimmen, daß der Senderkolben durch einen Kurbelantrieb in periodische Bewegung versetzt wird, die praktisch durch das Sinusgesetz gekennzeichnet sei. Wir bezeichnen den Halbmesser des Kurbelkreises mit r und setzen voraus, daß die Leckverluste durch das Speiseventil s mit dem unveränderlichen Speisedruck p_s ausgeglichen werden, so daß der Speisedruck die untere Grenze des veränderlichen Druckes p bildet. Wir setzen weiter voraus, daß zu Beginn, $t = 0$, ein hydrodynamischer Gleichgewichtszustand herrscht und daß zugleich die Relativgeschwindigkeit des in der Lage 0 befindlichen Kolbens zum Rohr gleich null ist. Ueber diese Lage 0 vorgedrungen wird der Kolben während einer bestimmten Phase des Hubes im Pfeilsinne gegen die Flüssigkeitssäule beschleunigt; hierdurch entsteht in der unmittelbar vor dem Kolben befindlichen Flüssigkeitsschicht ein Druckanstieg, der in der Längsrichtung des Rohres, die wir durch die Koordinate x kennzeichnen wollen, mit der noch zu bestimmenden Geschwindigkeit a der Druckwellen fortschreitet. Wir wollen unsere einleitenden Berechnungen durch die Einschränkung vereinfachen, daß im Augenblick t der Druckanstieg die Querwand F noch nicht erreicht hat, daß also das Rohr als unendlich lang betrachtet werden kann. Nach der Ableitung des gesuchten Gesetzes werden wir diese einschränkende Voraussetzung fallen lassen.



Abb. 1

Wir führen die nachstehenden Bezeichnungen ein:

E Elastizitätsmaß des Rohres,
ε » der Flüssigkeit,
$\beta = \frac{1}{\varepsilon}$ spezifische Raumverminderung der Flüssigkeit bei Druckzunahme,
p veränderlicher Druck zu einer beliebigen Zeit in einem beliebigen Rohrquerschnitt,
c veränderliche Strömungsgeschwindigkeit zu einer beliebigen Zeit,
γ spezifisches Gewicht der Flüssigkeit,
$y = \frac{p}{\gamma}$ Druckhöhe und
$F = \frac{D^2 \pi}{4}$ Kolbenquerschnitt.

Nach dem Hauptsatz der Dynamik ist das Produkt der Beschleunigung $\frac{\partial c}{\partial t} + c \frac{\partial c}{\partial x}$ und der Masse einer in der Entfernung x gewählten unendlich kurzen Flüssigkeitszylinders $\frac{\gamma}{g} F\, dx$ gleich der beschleunigenden Kraft, also

$$F \frac{\gamma}{g} dx \left(\frac{\partial c}{\partial t} + c \frac{\partial c}{\partial x}\right) = Fp - F\left(p - \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) = F \frac{\partial p}{\partial x} dx \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Durch Kürzen erhält man

$$\frac{\gamma}{g}\left(\frac{\partial c}{\partial t} + c \frac{\partial c}{\partial x}\right) = \frac{\partial p}{\partial x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Im folgenden wird sich ergeben, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Druckwelle gegenüber der veränderlichen Strömungsgeschwindigkeit c so groß ist, daß wir das Glied $c \frac{\partial c}{\partial x}$ in Gl. (2) vernachlässigen können. Wir erhalten demnach als erste Grundbeziehung des gesuchten Gesetzes

$$\frac{\gamma}{g} \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Eine weitere Beziehung zwischen den veränderlichen c, p, t und x erhalten wir durch die Berechnung des Geschwindigkeitsunterschiedes, der zu einer bestimmten Zeit t zwischen den Querschnitten AB und CE herrscht. Dieser Geschwindigkeitsunterschied

wird hervorgerufen durch die Deformation des bezeichneten elementaren Flüssigkeitszylinders, welche zufolge der zu der Zeit dt verlaufende Druckänderung dp eintritt. Die Druckzunahme dp bedingt eine Zusammendrückung des Flüssigkeitszylinders und eine gleichzeitige Dehnung des umgebenden Rohrelementes; die resultierende axiale Formänderung ϑ ergibt sich aus der elastischen Längenänderung ϑ_1 des Flüssigkeitselementes und aus einer Längenänderung ϑ_2, die der volumetrischen Aenderung des Rohrelementes dV entspricht. Der von der Zusammendrückung der Flüssigkeit herrührende Anteil der Längenänderung ist nach dem Hookeschen Gesetz

$$\vartheta_1 = \beta\, dx \frac{\partial p}{\partial t} dt \quad \text{. . . . . (4).}$$

Für die Dehnung des Rohrhalbmessers R durch die Druckzunahme dp gilt

$$d\varrho = \frac{R^2}{E d} \frac{\partial p}{\partial t} dt,$$

also ist die volumetrische Zunahme infolge Dehnung des Rohres

$$R^2 \pi \vartheta_2 = \pi D\, d\varrho\, dx = \pi D \frac{R^2}{E d} \frac{\partial p}{\partial t} dt\, dx,$$

daher

$$\vartheta_2 = dx \frac{D}{E d} \frac{\partial p}{\partial t} \quad \text{. . . . . (5).}$$

Der Geschwindigkeitsunterschied zwischen den Querschnitten AB und CE ist also

$$\left(c + \frac{\partial c}{\partial x} \partial x\right) dt - c\, dt = \vartheta_1 + \vartheta_2.$$

Durch Einsetzen der Gl. (4) und (5) für ϑ_1 und ϑ_2 erhalten wir die zweite Grundbeziehung

$$\frac{\partial c}{\partial x} = \left(\beta + \frac{D}{E d}\right) \frac{\partial p}{\partial t} \quad \text{. . . . . (6).}$$

Führen wir die Bezeichnungen $y = \frac{p}{\gamma}$ und $\frac{\gamma}{g}\left(\beta + \frac{D}{E d}\right) = \frac{1}{a^2}$ ein, so können die Grundgleichungen (3) und (6) auf die folgende Form gebracht werden:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = g \frac{\partial y}{\partial x} \quad \text{. . . . (7 a).} \qquad \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{g}{a^2} \frac{\partial y}{\partial t} \quad \text{. . . . (7 b).}$$

Diese Differentialgleichungen der Rohrwellen hat nun Alliévi auf Grund der folgenden Ueberlegung integriert: Angenommen, wir bewegen uns längs der Leitung mit einer Geschwindkeit a, so müssen die Gleichungen (7 a) und (7 b) durch die Substitution von $x = at + k$ und $dx = a dt$ erfüllt werden. Setzen wir also auf der rechten Seite der Gleichung (7 b) an Stelle von $a \partial t$ den Wert ∂x und auf der linken Seite an Stelle von ∂x den Wert $a \partial t$, so haben wir $\frac{\partial c}{a \partial t} = \frac{g}{a} \frac{\partial y}{\partial x}$, also eine mit der Gleichung (7 a) identische Beziehung. Die Bedingung $x = at + k$ schließt demnach scheinbar jede von der Elastizität des Rohres und der Flüssigkeit abhängige Erscheinung aus. Der mit der konstanten Geschwindigkeit a sich längs der Leitung bewegende Beobachter stellt zu jeder beliebigen Zeit t in dem ihm gegenüberstehenden Flüssigkeitselement die gleiche Pressung fest, woraus folgt, daß jede Druckänderung sich unabhängig von ihrer Größe mit der gleichen unveränderlichen Geschwindigkeit a längs der Leitung fortpflanzt. Ist also $y = f(x, t)$ die gesuchte Funktion, die für jeden Augenblick und jeden Querschnitt die Größe y darstellt, so muß diese eine Funktion von $at - x$ oder von $t - \frac{x}{a}$ sein. Die Gleichungen (7 a) und (7 b) werden also durch

$$y = y_0 \pm \Psi\left(t \mp \frac{x}{a}\right) \quad \text{und} \quad c = c_0 \mp \frac{g}{a} \Psi\left(t \mp \frac{x}{a}\right) \quad \text{. . . . (8)}$$

befriedigt, worin Ψ eine durch die Grenzbedingungen zu bestimmende Funktion ist. Ψ stellt eine Druckhöhe dar, die sich mit der unveränderlichen Geschwindigkeit a sowohl in positiver wie auch in negativer Richtung entlang der Leitung fortpflanzen kann. Durch Aussondern dieser unbekannten Funktion $\Psi\left(t \mp \frac{x}{a}\right)$ erhalten wir die bemerkenswerte Beziehung

$$y - y_0 = \frac{a}{g}(c_0 - c) \quad \text{. . . . . (9),}$$

die ausdrückt, daß der aus der Veränderung der Strömungsgeschwindigkeit entstehende Druckanstieg in einer sehr langen Rohrleitung nur von Anfangs- und Endwert der Strömungsgeschwindigkeit abhängt und mit dieser in linearer Beziehung steht.

2. Die durch den Senderkolben hervorgerufene Schwingung. Es ist nun eine leichte Aufgabe, im Besitze dieses Satzes die Analyse der mit Abb. 1 gestellten Aufgabe durchzuführen.

Gleichzeitig mit dem Vorwärtsdringen des Senderkolbens im Pfeilsinne breitet sich die in der unmittelbar vor dem Kolben befindlichen Flüssigkeitsschicht erregte Druckwelle im Sinne der Gleichungen (7) mit der Geschwindigkeit

$$a = \frac{1}{\sqrt{\frac{\gamma}{g}\left(\beta + \frac{D}{E\,d}\right)}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

in der $+x$-Richtung aus. Im Augenblicke t, wenn der Kolben den Teilhub h ausgeführt und die Geschwindigkeit v erreicht hat, hat der an der Stirnfläche des Kolbens angreifende Druck nach Gl. (9) den Wert

$$p_t = y\gamma = \frac{\gamma}{g}\,a v + p_s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

erreicht; während in einem Rohrquerschnitt, dessen Entfernung vom Kolben größer als $x = at + h$ ist, noch der Anfangsdruck p_s herrscht. Im Augenblick t hat die Schwelle der Druckwelle die Entfernung x erreicht. Ihr Druck nimmt von der Kolbenfläche an bis zu x stetig ab, wenn der Kolben von 0 bis t stetig beschleunigt wird, Abb. 1. Alle Druckwerte, die zwischen den Grenzen $0 = x$ liegen, können aus der Funktion Ψ und diese aus der Kolbenbewegung, die unsere Grenzbedingungen darstellt, bestimmt werden. Voraussetzungsgemäß ist

$$v = V \sin \omega t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

und demnach entspricht der Verlauf des Druckes p an der Kolbenstirnfläche

$$p = \frac{\gamma}{g}\,a V \sin \omega t + p_k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

einer einfachen harmonischen Schwingung mit dem Mittelwert p_k. Dagegen ist der Zeitverlauf des Druckes in einem in der Entfernung x befindlichen Querschnitt um den unveränderlichen Phasenwinkel

$$-\varphi = -\omega t = -\omega \frac{x}{a}$$

rückversetzt. Also ist

$$p_x = \frac{\gamma}{g}\,a V \sin(\omega t - \varphi) + p_k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

Bezeichnen wir nach der in der Wechselstromtechnik üblichen Bezeichnungsweise die Schwingungszeit des Senders durch $T = \frac{2\pi}{\omega}$ und die Frequenz mit $f = \frac{1}{T}$, so erkennt man, daß ein Kolben, der am Ende eines mit Flüssigkeit gefüllten langen Rohres eine harmonische Bewegung ausübt, in der Flüssigkeitssäule synchrone Druckwellen erregt, deren Verlauf durch eine mit der Kolbengeschwindigkeit proportionale harmonische Funktion dargestellt werden kann, vorausgesetzt, daß der Mitteldruck der Leitung p_k größer als die Amplitude der Druckwellen

$$p_m = \frac{\gamma}{g}\,a V \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

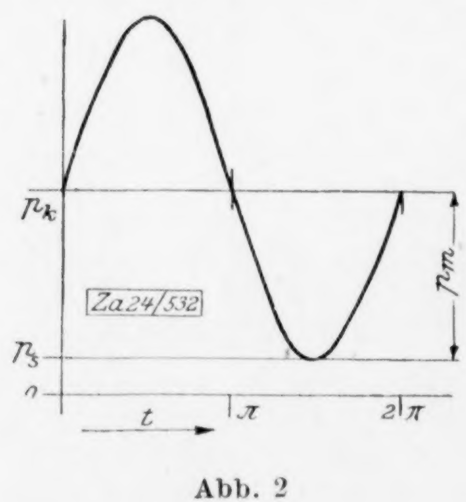


Abb. 2

ist. Diese Bedingung wird durch die Einrichtung nach Abb. 1 selbsttätig erfüllt, da für $p_k < p_m$ während der Minima soviel Flüssigkeit durch das Speiseventil s in das Rohr einströmt, bis $p_k - p_m = p_s$ ist, demnach bleibt der entsprechende Mitteldruck erhalten, Abb. 2. Die Wellenlänge ergibt sich aus

$$\lambda = a T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

Bezeichnen wir noch das durch einen beliebigen Rohrquerschnitt F in der Sekunde strömende Flüssigkeitsvolum

$$i = c F \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

als die Strömungsintensität, so können wir noch sagen, daß die Spannung p der Rohrwellen proportional der Intensität an der betreffenden Stelle ist.

3. Zahlenbeispiel. Die Gleichung (10) der Fortpflanzungsgeschwindigkeit a artet bei unendlich starrem Rohrmaterial $E = \infty$ in den Ausdruck der Schallgeschwindigkeit $a = \sqrt{\frac{g}{\beta \gamma}}$ für die betreffende Flüssigkeit aus. Mit dem empirisch festgestellten Werte der Unterwasserschallgeschwindigkeit von 1425 m/sec^{-1} ist für Wasser

$$\beta = 4{,}83 \cdot 10^{-9} \text{ und } \varepsilon = 2{,}07 \cdot 10^{8}.$$

Nach dem Landoltschen Zahlentafeln ist bei gewöhnlicher Temperatur für Mineralöl

$$\beta = 7{,}46 \cdot 10^{-9} \text{ und } \varepsilon = 1{,}34 \cdot 10^{8}.$$

In einem vollkommen starren Gefäß braucht man daher für 1 vH Raumverminderung bei Wasser 207 und bei Oel 134 at Ueberdruck; hiernach ist Wasser hundertmal elastischer als Gußeisen ($E = 2 \cdot 10^{10}$). Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit a der Rohrwellen in Stahlrohren ergibt sich mit $\frac{D}{d} = 5$ und $E = 2{,}2 \cdot 10^{10}$ kg/m zu $a =$ 1390 m/sec^{-1} für Wasser und $c = 1130$ m/sec^{-1} für Oel.

Die entsprechenden Wellenlängen erhält man für $f = 40$ zu

$$\lambda_{\text{Wasser}} = 35 \text{ m und } \lambda_{\text{Oel}} = 28{,}5 \text{ m}.$$

Die Berechnung des Festwertes $\frac{\gamma}{g} a$ der Gleichung (16) zeigt, daß die von 1 m/sec^{-1} Geschwindigkeit erzeugte Wellenspannung im Wasser 14 at ist und im Oel 11,4 at beträgt. Im umgekehrten Falle ist für 1 at Spannung bei Wasser rd. 7 cm/sec und für Oel 9 cm/sec Geschwindigkeit erforderlich.

4. Die Leistung der Rohrwellen. Mit Hilfe der abgeleiteten Gleichungen können wir leicht das indizierte Arbeitsfeld eines an einer unendlich langen Leitung angeschlossenen durch die Kurbel r gesteuerten Kolbens berechnen. Es ist der Kolbenweg

$$x = r\,(1 - \cos \omega t) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (18)$$

und die entsprechende Kolbenbelastung

$$P = F(p_m \sin \omega t + p_n) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (19).$$

Diese Gleichungen stellen eine Ellipse dar (x und P als Funktionen des Parameters t). Die beiden Hauptachsen in den Koordinatenrichtungen x und P sind $2\,r$ und $2\,F p_m$. Das Arbeitsfeld dieser Ellipse ist $F p_m r \pi$, das durch den Sender f-mal in der Sekunde geliefert wird. Die durch die Rohrwellen übertragene Leistung W ist also unter Berücksichtigung der Beziehung $\pi f = \frac{1}{2}\,\omega$

$$W = F p_m r \pi f = \tfrac{1}{2}\,\omega r F p_n = \tfrac{1}{2}\,V P_m \quad \ldots \ldots \ldots \quad (20)$$

oder die Hälfte des Produktes aus der mittleren Kolbenkraft P_m und der Kolbengeschwindigkeit V. Sie ist mithin eine quadratische Funktion der Geschwindigkeit, und zwar ist

$$W = \frac{\gamma a}{2\,g} F V^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (21\,\text{a}).$$

Mit Hilfe des Begriffes der Intensität nach Gl. (18) erkennt man, daß in Gl. (20) $F r \omega$ die Amplitude i_m des Stromes bedeutet und daß für die Leistung der Rohrwellen auch der bekannte Ausdruck der Elektrotechnik

$$W = \tfrac{1}{2}\, i_m p_m \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (21\,\text{b})$$

gilt, wofür nach Einführung der Mittelwerte $i = \frac{i_m}{\sqrt{2}}$ und $p = \frac{p_m}{\sqrt{2}}$ auch

$$W = i\,p \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (22)$$

geschrieben werden kann.

Zahlenbeispiel: Die indizierte Leistung eines Senders für $r = 2$ cm, $D = 3$ cm und $f = 40$ Uml./s ($n = 2400$) bei Betrieb mit Wasser ist zu bestimmen.

$$F = \frac{D^2 \pi}{4} = 7 \cdot 10^{-4}, \quad V = 2\,r \pi f = 5,$$

$$i_m = F V = 35 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \text{ sec}^{-1}, \quad p_m = 14\;V\,10^4 = 70 \cdot 10^4,$$

$$W = \tfrac{1}{2}\, i_m p_m = 1225 \text{ m kg sec}^{-1} = \mathbf{16{,}5\ PS.}$$

5. Der Einfluß der reflektierten Wellen. Der Sender teilt in jeder Sekunde der Flüssigkeitssäule die Energie $\frac{W}{f}$ mit. Die Zustandsänderung kann nur dann einen stationären Charakter haben, wenn der periodische Energiezuwachs in der Leitung sich unbeschränkt fortpflanzen kann oder wenn an der Seite des Empfängers an Stelle einer starren Wand ein nachgiebiger Kolben angeordnet wird, der sich mit der Druckwelle ohne Phasenverschiebung synchron bewegt und die empfangende Wellenenergie als Nutzleistung der Umgebung weiter vermittelt.

Behalten wir voraussetzungsgemäß die starre Wand F in der Entfernung l vom Sender bei, dann verhält sich diese unbewegte Wand gegenüber der bewegten Flüssigkeitssäule nach dem Prinzipe der Relativität wie ein entgegen den Rohrwellen bewegter, also um einen Phasenwinkel von 180^0 rückversetzter Kolben. Die Wand hat daher die Wirkung einer reflektierenden Fläche, von der Rohrwellen, ebenfalls mit der Geschwindigkeit a, jedoch im entgegengesetzten Sinne, ausgehen. Die durch den Sender erregten Wellen gelangen somit nach einmaliger Reflexion und in einer Zeit $\frac{2\,l}{a}$ wieder zum Sender zurück. Die Wirkung des Senders ist daher nur während der ersten $\frac{2\,l}{a}$ Zeitperiode stationär; die Aufrechterhaltung eines weiteren stationären Zustandes ist nur dann möglich, wenn die auf die reflektierten Wellen bezogene Leistung des Senders gleich null ist. Im Gegenfalle wird, falls für eine ausreichende Dämpfung nicht gesorgt wird, die Schwingungsenergie bis zum Rohrbruch gesteigert.

Da man die zurückgeworfenen Wellen als Wellen ansehen kann, die von einem, um die Phase π nacheilenden Gegensender nach dem Ursender ausgesandt werden, so ist die auf den Ursender bezogene Phasenverschiebung der zurückgeworfenen Wellen:

$$\varphi = \omega \frac{l}{a} - \pi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (23),$$

folglich der zurückgeworfene Druckverlauf am Ursender:

$$p_r = p_n \sin(\omega t - \varphi),$$

andererseits ist die vom Sender erregte Intensität

$$i = i_m \sin(\omega t - \varphi)$$

die Arbeit des Senders in der Zeit dt, also

$$d A = p_m i_m \sin \omega t \sin(\omega t - \varphi)\, dt.$$

Hieraus erhält man die mittlere Leistung für eine Periode zu

$$W = \frac{1}{T}\int_0^T p i dt = {}^1/_2\, p_m i_m \cos \varphi \quad \ldots \ldots \ldots (24).$$

Diese Leistung verschwindet nur, wenn $\varphi = \frac{\pi}{2}$ oder $(2\,n+1)\frac{\pi}{2}$ ist, also nur, wenn die Rohrlänge

$$l = (2\,n+1)\frac{\pi}{2\,\omega}\,a = (2\,n+1)\frac{\lambda}{4}$$

das ungerade Mehrfache einer Viertel-Wellenlänge ist. In diesem Falle entartet das elliptische Indikatordiagramm des Senders zu einer geraden Linie, die selbst mit der x-Achse der Ellipse zusammenfällt, da der Senderhub unverändert blieb. Hieraus folgt, daß die Kolbenbelastung während eines ganzen Hubes ein Festwert, und zwar gleich p_m ist. Die erregten und zurückgeworfenen Wellen erzeugen jetzt stehende Wellen, die am Sender und an jeder halben Wellenlänge vor dem Sender einen Knotenpunkt haben. Hier bleibt der Druck stets gleich, nur der Strom ändert sich zwischen den Grenzen $+i_m$ und $-i_m$. Es sind dies die wattlosen Stellen des Stromes. Dagegen ist die Strömung bei der Schlußwand und in jeder Halbwellenentfernung von der Schlußwand gleich null und nur der Druck ändert sich hier zwischen $+p_m$ und $-p_m$

Die im Prinzipe mögliche Erscheinung kann man aber durch die in Abb. 1 gezeichnete Einrichtung nur bei verhältnismäßig niedriger Frequenz und entsprechend langer Leitung erzeugen, da sonst bereits gefährliche Stöße entstehen, ehe der Grundton des Systems erreicht ist. Für Hochfrequenzmaschinen eignet sich die Einrichtung Abb. 3, auf die jedoch erst eingegangen werden soll, nachdem die Eigenschaften des Flüssigkeitskondensators behandelt sind.

6. Kondensatoren. Die im vorgehenden besprochenen Rohrwellen beruhen auf zweifachen Eigenschaften einer Flüssigkeitssäule: der Zusammendrückbarkeit und der longitudinalen Trägheit. Wir wollen nunmehr die Zustandsänderung in einer Ausbuchtung der Leitung untersuchen, wo sich der Strom über einen großen Strömungsquerschnitt ausbreitet, so daß die Wirkung der longitudinalen Trägheit vernachlässigt werden kann. Dieser Bedingung wird am besten durch eine mit einer Flüssigkeit vollständig gefüllten Kugel genügt, in deren Mittelpunkt der Sender mündet, so daß sich der Druck nach allen Richtungen unter annähernd gleichen Bedingungen ausbreiten kann. In solchen Fällen wird die Energieumwandlung selbst bei hoher Frequenz lediglich durch die Elastizität gekennzeichnet. Dies bedeutet soviel, daß zwischen der volumetrischen Aenderung dU der Ladung und der Druckzunahme dp die einfache Gleichung

$$dU = C dp \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (25)$$

besteht. Danach verhält sich eine Ausbuchtung der Leitung wie ein elektrischer Kondensator, und wir können daher hier die gleiche Benennung mit Recht übernehmen. Der Festwert C ist hierbei nichts anderes, als das Volumen der Ladung, das bei der Druckzunahme $dp = 1$ dem Kondensator zugeführt wird, also die Kapazität des Kondensators. Die Kapazität können wir im Sinne unserer Gleichungen (4) und (5) in der Weise berechnen, daß wir die Ladungen, die der Dilatation des Gefäßes und der Raumverminderung der Flüssigkeit entsprechen, addieren. Danach gilt allgemein für ein Gefäß, dessen Fassungsraum U beträgt,

$$dU = U\left(\beta dp + \frac{\partial U}{\partial p} dp\right),$$

wobei der Faktor β der Raumverminderung der Flüssigkeit,

$$\beta = \frac{1}{U}\frac{\partial U_f}{\partial p}$$

bei normaler Temperatur mit guter Annäherung unveränderlich ist. Wir müssen noch beweisen, daß der von der Form und dem Baustoff des Gefäßes abhängige Quotient $\frac{\partial U_f}{\partial p}$ in den praktisch vorkommenden Fällen ebenfalls unveränderlich ist, wonach man

$$dU = U(\alpha + \beta)\, dp \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (26)$$

erhält und erkennt, daß die Gl. (25) tatsächlich eine einfache Proportion darstellt. Wir wollen nunmehr die Kapazität einer Kugel berechnen.

Die Zugbeanspruchung σ_z einer Kugel ist beim Ueberdruck p, dem lichten Durchmesser D und der Wandstärke d

$$\sigma_z = p\,\frac{D^2\pi}{4\,(D+d)\,\pi d} = pN \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (27).$$

Da die prozentuale Zunahme des Kugelhalbmessers $\frac{\sigma}{E}$ beträgt, ist die Raumänderung der Dilatation

$$\varDelta U_f = \frac{\pi}{6}\left\{D^3\left(1 + \frac{\sigma}{E}\right)^3 - D^3\right\}.$$

Durch Einsetzen des Wertes für σ nach Gl. (27) ist

$$\frac{1}{U}\frac{\partial U_f}{\partial p} = 3\,\frac{N}{E} + 3\,p\left(\frac{N}{E}\right)^2 + 3\,p^2\left(\frac{N}{E}\right)^3 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (28).$$

Unter der Annahme, daß der Druck praktisch nicht über $p = 500$ at steigt und dementsprechend die größte Zugbeanspruchung $\sigma_z = 1000 \cdot 10^4$ beträgt, ergibt sich aus Gl. (27), daß $\left(\frac{N}{E}\right) = 10^{-10}$ eine kleine Zahl ist, so daß wir in Gl. (28) der Dilatation die Glieder höherer Ordnung mit einer Toleranz von 1 vT vernachlässigen können. Die Konstante der Dilatation ist daher $\alpha = 3 \cdot 10^{-10}$. Die Kapazität einer Kugel mit $\frac{D}{d} = 10$ ist

$$C = \left(\beta + \frac{6{,}8}{E}\right) U$$

oder für Wasser im Stahlgefäß $C_w = 5{,}14 \cdot 10^{-9}\, U$,
» Oel » » $C_o = 7{,}71 \cdot 10^{-9}\, U$.

Die Kapazität eines Zylinders ist mit der Berücksichtigung des Faktors der Dilatation $\alpha = \frac{D}{Ed}$ nach Gl. (6) für die Grundfläche F, die Länge l und für den Rauminhalt $U = Fl$

$$C = \left(\beta + \frac{D}{E\,d}\right) U.$$

Bei $\frac{D}{d} = 5$ erhält man für Wasser im Stahlrohr $C_n = 5{,}14 \cdot 10^{-9} U$,
» Oel » » $C_o = 7{,}70 \cdot 10^{-9} U$.

Die Energie eines Kondensators. Der in einem geschlossenen Kondensator vordringende Kolben verursacht bei der Kolbenfläche F und dem Kolbenweg dx den Druckanstieg

$$dp = \frac{F\,dx}{C} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29).$$

Das Indikatordiagramm des Kolbens ist mithin eine Gerade mit der Richtungstangente $\frac{F}{C}$. Der Druck nimmt im Laufe des positiven Kolbenhubes 0 bis π geradlinig mit dem Kolbenweg zu und erreicht bei jeder $(2\,n + 1)\,\pi$ Lage der Kurbel denselben $p_m = \frac{2\,F\,r}{C} + p_s$. Die Druckzunahme p entspricht der aufgespeicherten Energie

$$A = F\int_0^\pi p\,dx = C\int_0^p p\,dp = {}^1/_2\, C p^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30).$$

Es wird also durch jeden positiven Kolbenhub im Kondensator ${}^1/_2\, c p_m^2$ Energie aufgespeichert, die durch den hierauf folgenden Expansionshub der Antriebswelle wieder mitgeteilt wird. Es ist zu bemerken, daß dieser periodische Energieaustausch bei der Flüssigkeit ohne irgend einen merklichen inneren hysterischen Kraftverlust vor sich geht, da in der Flüssigkeit, auch bei sehr großer Druckänderung, keine Kompressionswärme auftritt. Energiewirtschaftlich ist also die Flüssigkeit, eine wesentlich bessere Feder, als die Luft.

Danach ist die mittlere Leistung eines in einen geschlossenen Kondensator eindringenden, durch eine Kurbel r bewegten Kolbens gleich null. Der Zeitverlauf des im Kondensator erzeugten Druckes ist nämlich:

$$p = \frac{F}{C}\, r\,(1 - \cos \omega t) + p_s = \frac{F}{C}\, r \cos(\omega t - \pi) + p_k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31),$$

also eine um den Mitteldruck p_k nach einem Cosinusgesetz verlaufende Funktion, die gegenüber der durch den gleichen Hub erregten Strömung um $\pi/2$ rückversetzt ist. Die mittlere Leistung ist daher nach Gl. (24)

$$W = {}^1/_2\, i_m \frac{F}{C}\, r \cos \varphi = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32).$$

Der an der Mündung einer Ausbuchtung der Rohrleitung auftretende Ladestrom ist

$$i = C\,\frac{dp}{dt}$$

und mit der Gleichung für die Druckwellen $p = p_m \sin \omega t$

$$i = C\,\omega\, p_m \cos \omega t = C\,\omega\, p_m \sin(\omega t + \pi/2) = \frac{\gamma}{g}\, a\, V\, \omega\, C \sin(\omega t + \pi/2)\,. \quad (33)$$

ein einwelliger Strom, dessen Amplitude $i_m = \frac{\gamma}{g}\, a\, r\, \omega^2 C$ beträgt und gegen die Druckwellen um einen Phasenwinkel von 90^0 voreilt.

7. Das Kraftübertragungssystem der Firma Dorman. Zur Erregung von Rohrwellen von der Amplitude p_m verwendet die Firma Dormann außer dem Sender, dessen Hubvolumen U_h beträgt, nach Abb. 3 einen Kondensator c', dessen Kapazität $c = \frac{U_h}{2\,p_m}$ beträgt.

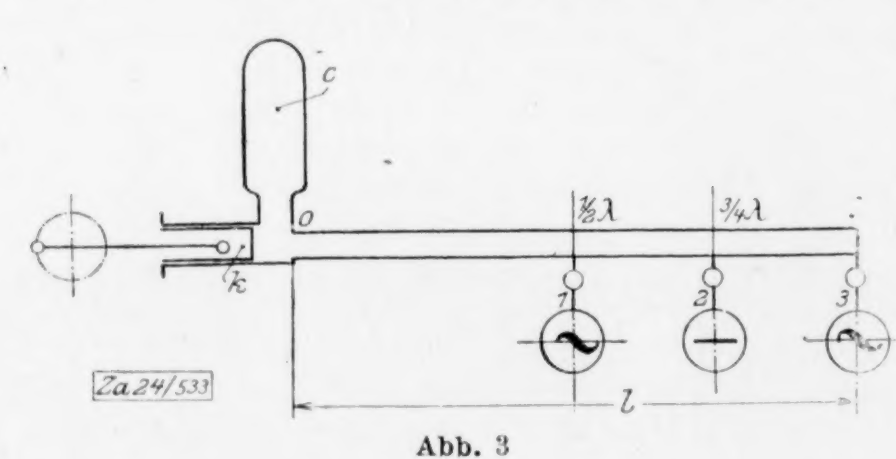


Abb. 3

Am Kondensator können mehrere Leitungen angeschlossen werden, deren Längen l die ungeraden Mehrfachen der halben Wellenlänge sind. Die Abzweigungen 1, 2, 3, ... n führen zu je einer Verbrauchstelle, die einzeln ausgeschaltet werden können.

Bei dem Speisedruck p_s erregt der Sender im Kondensator Druckwellen, die um den Mittelwert $p_k = p_m + p_s$ schwingen. Sind alle 1, 2, 3 . . . . . n Abzweigungen abgesperrt, so entstehen in den Arbeitsleitungen stehende Wellen ebenfalls von der Amplitude p_m, die in den Entfernungen 0, $^1/_2\,\lambda$, λ . . . $n\frac{\lambda}{2}$ einen Knotenpunkt haben. An diesen Stellen ist der Strom gleich null und die Spannung ändert sich wie die Spannung im Kondensator. Hieraus folgt, daß bei dem Rohranschluß o vom Kondensator Flüssigkeit weder aus- noch einströmt, daß also die Leistungs-Belastung des Senders gleich null ist.

Schaltet man den Motor 1 ein, so entsteht im Abschnitt 0—1 eine der Leistung 1. entsprechende Arbeitswelle i_1, wogegen im Abschnitt 1—3 die stehende Welle unverändert erhalten bleibt. Im Abschnitt 0—1 herrscht die Resultierende der stehenden und der Arbeitswelle i_1. Der bei der Stelle $^3/_4\,\lambda$ angeschlossene Wechselstromverbraucher 2 kann dagegen keine Arbeit leisten, da hier die Spannung dauernd p_k ist. Die übertragbare Leistung ist dem Rohrquerschnitt proportional. Der Querschnitt der Hauptleitung F ist also gleich der Summe der Abzweigungen $F = \sum_{n=1}^{n=i} F_n$.

Die Analogie den Selbstinduktion. Eine in der Leitung kolbenförmig und reibungsfrei bewegliche Masse m verursacht zwischen den getrennten Flüssigkeitssäulen eine analoge Phasenverschiebung wie eine Selbstinduktion. Schließt sich nämlich die Kolbenfläche F an die Flüssigkeitssäulen ohne Unstetigkeit an, dann können wir an Stelle der Aenderung der Kolbengeschwindigkeit $F\frac{dc}{dt}$ im Sinne der Gl. (18) $\frac{di}{dt}$ schreiben. Ist $p_1 - p_2$ der Druckunterschied zwischen den Grundflächen 1 und 2 des Kolbens, so ist die beschleunigende Kraft

$$F(p_1 - p_2) = m\frac{dc}{dt}.$$

Führt man den Faktor $\frac{m}{F^2} = L$ und die Bezeichnung $p_1 - p_2 = p_L$ ein, so ist

$$p_L = L\frac{di}{dt} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (34).$$

Es ist hieraus zu ersehen, daß der Faktor L, den wir im nachstehenden als den Schwingungserreger benennen wollen, die Eigenschaft einer Selbstinduktion darstellt. Wird nämlich der Schwingungserreger L in einem Wechselstrom $i = i_m \sin \omega t + p_k$ eingeschaltet, so wird zwischen den Anschlußpunkten des Schwingungserregers die einwellige Spannung

$$p_L = \omega t L i_m \cos \omega t = \omega L i_m \sin(\omega t + \pi/2) \quad \ldots \ldots \quad (35)$$

entstehen, die gegenüber der Strömung um einen Phasenwinkel von 90° voreilt.

Die Bestimmung der Phasenverschiebung: Die Vektoren der im Querschnitt 1 angreifenden Wellenspannung $p_r = \frac{\gamma}{g} a V \sin \omega t$ und der erregten Spannung p_L sind zueinander um 90° versetzt. Ihre Resultierende ergibt sich somit als die Hypotenuse eines Rechtecks, deren Spannung

$$p = p_1 + p_L = p_m \sin(\omega t + \varphi)$$

und deren Amplitude

$$p_m = i_m \sqrt{\left(\frac{\gamma a}{g F}\right)^2 + \omega^2 L^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (36)$$

ist. Die auf den Querschnitt 1 bezogene Phasenverschiebung ist

$$tg\,\varphi = \frac{\omega L}{\left(\frac{\gamma a}{g F}\right)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (37),$$

worin $\frac{\gamma a}{g F} = \frac{p_m}{L_m}$ nichts anderes, als der Wellenwiderstand Z ist, was aus dem nachstehenden hervorgeht. Die Schwingungsenergie ist $A = {}^1/_2\, L\, i^2$.

Dormans Niethammer (Abb. 4) ist ein interessantes Analogon eines elektrischen Resonanzsystems. Er besteht aus einem schwingenden Kolben m, der in einen Kondensator eingekapselt ist. Der Schwingungserreger L und die Kapazität c sind so gewählt, daß die Frequenz der Eigenschwingungen mit derjenigen der zum Antriebe dienenden Rohrwellen übereinstimmt. Die Zuleitung der an der Kolbenfläche F_1 angreifenden Druck-

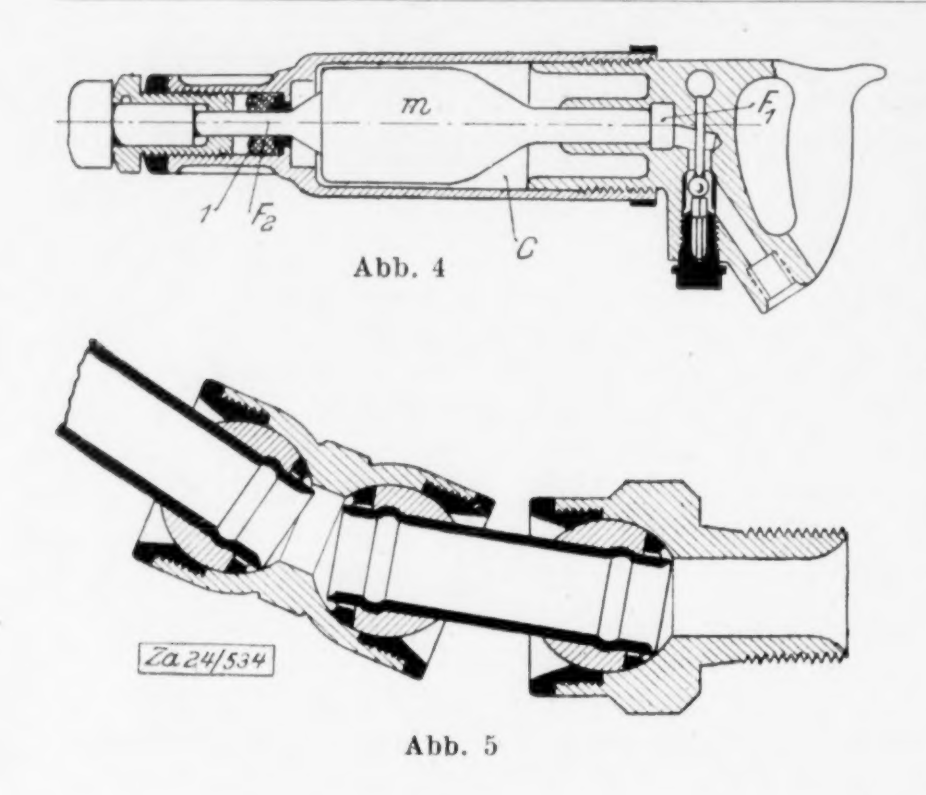


Abb. 4

Abb. 5

wellen geschieht durch eine biegsame Rohrleitung, die aus kugelgelenkig beweglichen und durch Lederstulpen abgedichteten Elementen besteht (Abb. 5). Eine stangenförmige Verlängerung des Kolbens ist bei 1 abgedichtet und aus dem Gehäuse c' des Kondensators zum Werkzeug herausgeführt. Der Stangenquerschnitt F_2 ist kleiner als F_1, so daß beim Vorwärtsdringen des Kolbens der Flächenunterschied $F = F_1 - F_2$ eine Druckzunahme der umgebenden Flüssigkeit verursacht. Sehen wir von der Dämpfung ab, so ist die Beschleunigung des Kolbens

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = -\frac{F}{m\,C}\,x,$$

woraus sich die Phasengeschwindigkeit der Resonanz

$$\omega\,F^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{L\,C}}$$

ergibt. Die Vorteile dieser Bauart liegen auf der Hand. Außer der überraschenden Einfachheit muß die Oekonomie der Kraftübertragung betont werden. Nach Prof. Simons ist der Gesamtwirkungsgrad von pneumatischen Werkzeugen geringer als 20 vH und auch im besten Falle nicht höher als 28 vH. Dagegen verbürgt Dorman einen Wirkungsgrad von über 50 vH, was mit Rücksicht darauf, daß die Kraft ohne Kompressionswärmeverluste und mit verhältnismäßig geringen Leckverlusten übertragen wird, durchaus verständlich erscheint.

8. Gedämpfte Rohrwellen. Mit Hilfe der Begriffe der Kapazität und der Selbsterregung können wir nunmehr alle Eigenschaften der Rohrwellen aus den bekannten physikalischen Erscheinungen der in offenen Leitungen (Antennen) schwingenden elektrischen Ströme ableiten, falls wir nur für die spezifische Kapazität und Selbstinduktion einer elektrischen Leitung die entsprechenden Größen C und L einer Flüssigkeitsleitung einsetzen. Die Kapazität der Rohrlänge 1 ist

$$C = F\left(\beta + \frac{D}{E\,d}\right) \quad \dots\dots\dots\dots \quad (38)$$

und ihre Selbsterregung

$$L = \frac{\gamma}{g\,F} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (39).$$

Ein Unterschied, der berücksichtigt werden muß, ist, daß der Spannungsabfall, der infolge des Reibungswiderstandes auftritt, eine quadratische Funktion des Stromes ist, weshalb die Analogie des Ohmschen Gesetzes hier nicht zutrifft. Bezeichnen wir den Spannungsabfall bei dem Strom 1 durch γK, so lauten die Differentialgleichungen der gedämpften Rohrwellen

$$-\frac{\partial x}{\partial p} = \gamma\,K\,i^2 + L\frac{\partial i}{\partial t} \quad \dots \quad (40\,a), \qquad -\frac{\partial i}{\partial x} = C\frac{\partial p}{\partial t} \quad \dots\dots \quad (40\,b).$$

Diese Gleichungen sind aber wegen dem quadratischen Ausdruck von i in geschlossener Form nicht integrierbar. Wir werden deshalb mit einem korrigierten Wert des Widerstandes γK rechnen, der für einen Mittelwert des Stromes bei einem geradlinigen Spannungsabfall nach i die gleiche Reibungsarbeit liefert, wie sie in der veränderlichen Strömung tatsächlich auftritt.

Aendert sich der Strom in der Zeit von O bis T nach einem beliebigen Gesetz zwischen O und i_m, so ist die Reibungsarbeit

$$M_r = \int_0^{i_m} p_r\,d\,i \quad \dots\dots\dots\dots \quad (41).$$

Diese Arbeit kann nun auf zwei Wegen verbraucht werden: entweder durch einen Widerstand, der den tatsächlichen Verhältnissen angepaßt ist und eine quadratische Beziehung $p_r = \gamma K i^2$ darstellt, oder aber mit der Ueberlagerung eines geradlinig ansteigenden Widerstandes. Setzen wir die, durch die Integration von (41) erhaltenen Ausdrücke einander gleich:

$$^1/_3\, \gamma K i_m^{\,3} = {^1/_2}\, R i_m^{\,2},$$

so ergibt sich, daß der auf die gleiche Strömung bezogene mittlere spezifische Widerstand

$$R = {^2/_3}\, K \gamma i_m$$

im Gegensatze zu dem elektrophysikalischen Begriff des Widerstandes die Dimension einer Leistung hat. Bezeichnen wir die Reibung der benetzten Flächeneinheit durch ξ, so ist die Widerstandshöhe des kreisrunden Rohres bei der Länge l

$$\frac{p_r}{\gamma} = \xi \frac{l}{D} \frac{c^2}{2g} = \xi \frac{l}{D F^2} \frac{i^2}{2g}$$

daher für $l = 1$

$$K = \frac{8}{\pi^2} \frac{\xi}{g D^5}, \quad \text{also} \quad R = \frac{4}{3\pi} \frac{\gamma \xi}{g D^3} C_m = \frac{16}{3\pi^2} \frac{\gamma \xi}{g D^5} i_m \quad . \; . \; . \quad (43).$$

Soweit wir also für die Praxis nur einen geringen Abfall des Stromes i_m zulassen, können wir schreiben

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = R i + L \frac{\partial i}{\partial t} \quad \text{und} \quad -\frac{\partial i}{\partial x} = C \frac{\partial p}{\partial t} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (44).$$

Dies ist aber die Differentialgleichung eines in einer vollkommen isolierten offenen Leitung schwingenden elektrischen Stromes. Das allgemeine Integral dieser Gleichungen ist $p = U e^{-\alpha t}$; die durch die Substitution $\alpha = {^1/_2} \frac{R}{L}$ erhaltene Lösung stellt, soweit $U \frac{C R^2}{4 L}$ vernachlässigt werden kann, mit

$$\frac{\partial U^2}{\partial x^2} = L C \frac{\partial U^2}{\partial t^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (45).$$

die bekannte d'Alembertsche Gleichung der schwingenden Saite dar. Diese ergibt für

$$p = e^{-\alpha t} [f_1 (x - a t) + f_2 (x + a t)] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (46)$$

und durch die Substitution dieses Ausdruckes in (44b) für

$$i = \sqrt{\frac{C}{L}}\, e^{-\alpha t} [f_1 (x - a t) + f_2 (x + a t)] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (47)$$

zwei Wellen, die sich mit gleicher, aber entgegengesetzter Geschwindigkeit a fortpflanzen. Die Spannung ist gleich der Summe, die Strömung gleich dem Unterschied dieser Wellen. Die Form f_1 und f_2 dieser Wellen hängt von den Anfangsbedingungen ab und ist konstant (unveränderlich), sie klingt jedoch in der Zeit ab. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$a = \frac{1}{\sqrt{L C}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (48)$$

ergibt durch die Substitution der entsprechenden Größen L und C aus (38) und (39) einen mit der Gleichung (10)

$$a = \frac{1}{\sqrt{\frac{\gamma}{g}\left(\beta + \frac{D}{E d}\right)}}$$

identischen Ausdruck, der zuerst durch Alliévi aus rein hydrodynamischen Ueberlegungen abgeleitet wurde. Der Proportionalitätsfaktor zwischen p und i ist der uns bereits aus Gl. (37) bekannte Wellenwiderstand

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\gamma a}{g F}$$

Diese auffallende hydrodynamische Analogie der Elektrodynamik scheint die Auffassung zu berechtigen, daß die Elektrizität dem Wesen nach ein imponderabiles und vollkommen elastisches Fluidum ist.

Zahlenbeispiel. In welcher Entfernung nimmt die Spannung der Rohrwellen bei dem Rohrdruckmesser $D = 0{,}03$ und Strömungsgeschwindigkeit $C_m = 5$ um 10 vH ab?

Da die Spannung verhältnisgleich der Geschwindigkeit abnimmt, werden wir den Faktor R nicht für die Anfangsgeschwindigkeit $C_m = 5$, sondern für diejenige Geschwindig-

keit berechnen, die an der Hälfte der zu berechnenden Entfernung herrscht, wir setzen daher eine fünfprozentige Abnahme oder $C' = 0{,}95\ C_m$ voraus. Dann ist mit $\xi = 0{,}03$

$$L = \frac{1000}{\gamma F} = 1{,}46 \cdot 10^5,\quad R = c' \frac{4}{3\pi} \frac{\gamma \xi}{g D^3} = 2{,}3 \cdot 10^5,\quad \alpha = \frac{R}{2L} = 7{,}9 \cdot 10^{-1}.$$

Bezeichnen wir die durch Dämpfung verminderten Werte der ursprünglichen p_m durch ηp, dann gilt für die Verhältniszahl der Spannungsabnahme nach (46):

$$e^{\alpha t} = \frac{1}{\eta},$$

wonach die Zeit, die bis zur Entstehung des Schwundes verläuft,

$$t = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{\eta}$$

mit $\eta = 0{,}9$ und $\alpha = 0{,}79$ rund 0,125 s. beträgt. Während dieser Zeit haben die Rohrwellen den Weg $H = a \cdot 0{,}125 = 172$ m zurückgelegt. In dieser Entfernung beträgt also der Druck der Wellen den 0,9-ten und die Energie den 0,81-ten Teil des Anfangswertes. Es ist hieraus zu ersehen, daß die Leistungsübertragung durch Rohrwellen nur bei mäßiger Entfernung wirtschaftlich und nur dann begründet ist, wenn die Betätigung des Motors eine intermittierende Krafterteilung erfordert, wie dies insbesondere bei Bohrwerkzeugen, Hämmern usw. der Fall ist. Die Ursache dieser beschränkten Wirkungsweite liegt nach Gl. (13) in dem Umstand, daß der Druck der Rohrwellen durch ihre Strömungsgeschwindigkeit gekennzeichnet ist, wogegen bei der Gleichstromübertragung ein beliebiger Flüssigkeitsdruck bei beliebig kleiner Strömungsgeschwindigkeit gewählt werden kann.

313

Einfluß der inneren Dämpfung auf die Festigkeit gegenüber Stößen.

Von **TH. P. LESCH** in Helsingfors.

[Bevollmächtigte Uebertragung aus dem Schwedischen, von Saller].[1])

Es ist eine bekannte Tatsache, daß die Schwingungen, in die zum Beispiel ein frei aufliegender Balken durch einen transversalen Stoß versetzt wird, schnell abklingen. Die Verhältnisse lassen auf große dämpfende Kräfte im Innern des Balkens schließen. Zwar übt auch die umgebende Luft einen hemmenden Einfluß aus, ebenso wie die Reibung beim Stoß in gewissem Umfange die Schwingungsbewegung abbremst. Doch kommen diese beiden Einflüsse in den meisten Fällen nur in zweiter Linie in Betracht. Die dämpfenden Kräfte schränken zugleich die unmittelbare Stoßwirkung ein, da die größte Einbiegung am Balken geringer wird, als wenn Dämpfung nicht vorhanden wäre. Eine naheliegende Aufgabe ist es nun, den mildernden Einfluß der inneren Dämpfung auf den Stoß der Größe nach zu untersuchen. Der Verfasser wurde zu der Aufgabe durch einen früheren Aufsatz in »Teknikern« geführt, der die Theorie der Stoßproben und im Zusammenhange damit eine Anzahl Versuche behandelte, deren Ergebnis jedoch mit den wissenschaftlichen Betrachtungen nicht übereinstimmte. Auch in dieser Theorie war auf die innere Dämpfung keine Rücksicht genommen worden.

1. Ansatz für die Dämpfungsspannung. Um zu einer Größeneinschätzung des Einflusses der inneren Dämpfung zu gelangen, muß man offenbar eine geeignete Annahme über die Abhängigkeit der Spannung in einer Faser von der Faserdehnung und der Dehnungsgeschwindigkeit einführen. Bei den Berechnungen, die der Verfasser anstellte, benutzte er den gleichen Ansatz, dessen sich Routh[2]) in seiner Theorie über Längsschwingungen in einem Stabe bedient, um deren schnelles Abklingen zu erklären. Routh nimmt an, daß sich über die Hookesche Spannung in jedem Querschnitt eine Dämpfungsspannung lagert, die der Dehnungsgeschwindigkeit im gleichen Querschnitt verhältnisgleich ist. Wenn also die Dehnung in dem betrachteten Querschnitt ε ist und die Spannung σ, so ist nach Routh

$$\sigma = E\varepsilon = F\frac{d\varepsilon}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

[1]) Das Original dieses Aufsatzes ist erschienen in der finnischen Zeitschrift »Teknikern« in Helsingfors. Die Veröffentlichung der Uebersetzung erfolgt auf Wunsch des Verfassers im Einverständnis mit dem finnischen Herausgeber.

[2]) Routh: Die Dynamik der Systeme starrer Körper; Bd. II, Leipzig 1898, S. 491.

In (1) ist E die Elastizitätszahl und F ebenfalls ein positiver Festwert, für den der Verfasser die Bezeichnung »Dissipationszahl« vorschlägt. Es läßt sich nämlich nachweisen, daß die im Balken während einer gewissen Zeit, z. B. der Zeiteinheit, in Wärme überführte Arbeit mit F verhältnisgleich ist. Rein äußerlich kann der Routhsche Ansatz folgendermaßen gewonnen werden: die Spannung in einem gegebenen Querschnitt muß in irgend einer Weise sowohl von ε wie von $\frac{d\,\varepsilon}{d\,t}$ abhängen. Denken wir uns die Spannungsfunktion nach den beiden genannten Veränderlichen in einer Taylorschen Reihe entwickelt, wobei wir uns auf die linearen Ausdrücke beschränken, so ergibt sich gerade der Ansatz (1), sofern wir nur weiter bedenken, daß $\sigma = 0$ ist für den Fall, daß sowohl ε wie $\frac{d\,\varepsilon}{d\,t}$ gleich 0 ist. Der Routhsche Ansatz muß also allgemeine Gültigkeit für hinreichend kleine Werte der Dehnung und Dehnungsgeschwindigkeit besitzen.

Bei früheren Untersuchungen konnte der Verfasser keine Zahlenanwendungen bringen, weil ihm keine versuchsmäßigen Feststellungen der Dissipationszahl bekannt waren. Vor einiger Zeit haben indes die beiden Forscher Honda und Konno Bestimmungen dieser Größe für eine Anzahl verschiedener Metalle veröffentlicht[1]). Da also nunmehr die Möglichkeit vorliegt, den einschränkenden Einfluß der inneren Dämpfung auf die Stoßwirkung einzuschätzen, will der Verfasser hier seine ergänzten Untersuchungen vorführen in der Hoffnung, einiges Interesse zu finden. Ueber das Verfahren Hondas und Konnos, die Dissipationszahl zu bestimmen, soll an geeigneter Stelle ebenfalls kurz berichtet werden.

2. Aufstellung der Energiegleichung. Es soll zuerst die Energiegleichung für den schwingenden Balken aufgestellt werden. Aus der Energiegleichung läßt sich mit Hilfe einer vereinfachenden Annahme über die augenblickliche Gestalt des Balkens die Bewegungsgleichung in Form einer gewöhnlichen Differentialgleichung gewinnen. Ihre Integration bietet keinerlei Schwierigkeiten.

Wir denken uns den Balken mit ursprünglich wagerechter Achse (Abb. 1). Wir nehmen diese zur x-Achse in einem rechtwinkligen Achsenkreuz; die y-Achse ihrerseits geht lotrecht durch die Mitte der Balkenachse. Als positive Richtung rechnen wir lotrecht nach unten. Ein sehr kurzes Balkenstück von der Länge λ zwischen zwei Querschnitten wird bei der Biegung so aus der Form gebracht, daß die Endflächen unter einem kleinen Winkel gegeneinander geneigt sind. Der Punkt, in dem ihre Schnittlinie die xy-Ebene trifft, bildet den Krümmungsmittelpunkt für das betrachtete Stück der elastischen Linie. Die absolute Größe des Krümmungshalbmessers bezeichnen wir mit ϱ. Eine Faser im Abstand η von der neutralen Achse wird um den Betrag $\eta \frac{\lambda}{\varrho}$ verlängert. In dem betrachteten Punkte ist also die Dehnung gleich η/ϱ. Nehmen wir nun $\frac{1}{\varrho} = \left|\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right|$ an, was bedeutet, daß die Tangente der elastischen Linie in jedem Punkte recht wenig von der ursprünglichen wagerechten Lage der Balkenachse abweicht, so erhalten wir für die normale Hookesche Spannung in dem betrachteten Punkt den Ausdruck

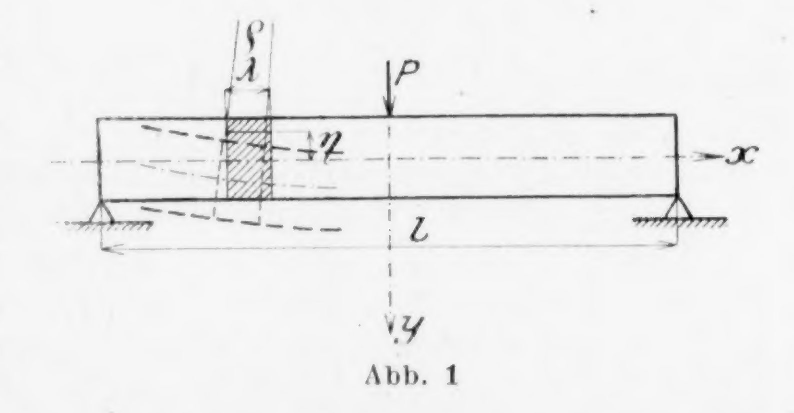


Abb. 1

$$\sigma_{\text{Hooke}} = E\,\eta \left|\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right| \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Im Abstand η von der neutralen Achse möge die Balkenbreite b sein. Im Volumelement $\lambda\, b\, d\eta$ des Balkenstückes λ ist eine potentielle Energie aufgespeichert gleich $\frac{E\, b\, d\eta}{2\,\lambda}\left(\eta\,\frac{\lambda}{\varrho}\right)^2 = \lambda\,\frac{E\,\eta^2\, b\, d\eta}{2\,\varrho^2}$. Durch Integration über den ganzen Querschnitt erhält man die potentielle Energie des Balkenstückes zu $\lambda\,\frac{E\,J}{2\,\varrho^2}$, wenn J das Trägheitsmoment des Querschnittes in bezug auf die neutrale Achse ist. Setzen wir nun $\lambda = dx$, machen über

[1]) Phil. Mag. 42, 1921, S. 115 bis 123.

$\frac{1}{\varrho}$ die schon genannte Annahme und bezeichnen die Länge des Balkens mit l, so erhalten wir für die potentielle Energie des Balkens im Zeitpunkte t den Ausdruck

$$V = \frac{EJ}{2}\int\limits_{-l/2}^{+l/2}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2 d\,x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3).$$

In (3) ist weiterhin angenommen, daß der Balkenquerschnitt unveränderlich ist.

Die Dämpfungsspannung im Abstand η von der neutralen Achse ist im Zeitpunkte t auf Grund unserer Annahme gleich $F\eta\,\frac{\partial\,(1/\varrho)}{\partial\,t}$. Im Volumelement $\lambda b d\eta$ des Balkenstückes λ wird zwischen den Zeitpunkten t und $t + dt$ eine Arbeit aufgebraucht gleich $bd\eta\,F\eta\,\frac{\partial\,(1/\varrho)}{\partial\,t}\,\lambda\,\eta\,\frac{\partial\,(1/\varrho)}{\partial\,t}\,d\,t = \lambda\,F\left\{\frac{\partial\,(1/\varrho)}{\partial\,t}\right\}^2\eta^2\,b\,d\eta\,dt$. Durch Integration über den ganzen Querschnitt erhält man nun die im Balkenstück λ im betrachteten Zeitelement dt in Wärme überführte Arbeit zu $\lambda FJ\left\{\frac{\partial\,(1/\varrho)}{\partial\,t}\right\}^2 dt$, wobei J die schon angegebene Bedeutung besitzt. Mit der angenommenen Annäherung hinsichtlich $\frac{1}{\varrho}$ wird also die in der Zeiteinheit im Zeitpunkte t in Wärme überführte Arbeit im ganzen Balken

$$\Phi = FJ\int\limits_{-l/2}^{+l/2}\left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^2\,\partial t}\right)^2 d\,x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4).$$

Für die kinetische Energie des Balkens im Zeitpunkte t erhalten wir schließlich die Formel

$$L = \frac{M}{2\,l}\int\limits_{-l/2}^{+l/2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 d\,x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5).$$

Hierbei bedeutet M die ganze Masse des Balkens. Bei der Aufstellung dieses Ausdruckes haben wir die rotationskinetische Energie des Balkenelementes vernachlässigt. Wir werden weiterhin zeigen, daß diese tatsächlich von untergeordneter Bedeutung ist.

Wir stellen uns nun vor, daß auf den Balken eine Transversalkraft Y einwirkt, die der Einfachheit halber in der Balkenmitte angreifen muß. Die Ordinate dieses Punktes in der Mitte soll im weiteren mit η bezeichnet werden. Im Zeitelement dt verrichtet die Kraft Y die Arbeit $Yd\eta$; die Gesamtenergie des Balkens ändert sich um den Betrag $d(L + V)$ und ein Arbeitsbetrag Φdt wird in Wärme überführt. Der Satz von der Erhaltung der Energie gibt uns ohne weiteres die Gleichung

$$Yd\eta = d(L + V) + \Phi dt \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6).$$

3. Die Bewegungsgleichung. Aus der nunmehr aufgestellten Energiegleichung kann die Bewegungsgleichung des Balkens durch folgende Annahme gewonnen werden: Wir nehmen an, daß der Balken in jedem Augenblick die Gleichgewichtsform besitzt, die der Senkung des Punktes in der Mitte in jedem Augenblick entspricht[1]). Aus dieser Annahme erhält man nämlich y als Abhängige von η und x, wodurch V, Φ und L von η bezw. $\frac{d\eta}{dt}$ abhängig werden. Bei Einsetzung der gefundenen Ausdrücke in (6) geht diese Gleichung in eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten über, die auf bekannte Weise integriert wird.

Wir nehmen zunächst an, daß der Balken auf seinen Stützpunkten frei aufliegt. Bei statischer Belastung mit einer Kraft P in Balkenmitte gilt für das rechtseitige Feld $\left(O \rightarrow \frac{l}{2}\right)$ folgende Differentialgleichung der elastischen Linie:

$$EJ\,\frac{d^2 y}{d\,x^2} = -\,\frac{P}{2}\left(\frac{l}{2} - x\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7).$$

[1]) Siehe über diese Annahme z. B. Ostenfeld, Technische Elastizitätslehre, 3. Aufl., S. 286.

Durch Integration von (7) erhalten wir unter Beachtung, daß $\frac{dy}{dx} = 0$ für $x = 0$ und daß $y = 0$ für $x = \frac{l}{2}$, folgende Gleichung für die elastische Linie im rechtseitigen Feld:

$$EJy = \frac{Pl^3}{48}\left[4\left(\frac{x}{l}\right)^3 - 6\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 1\right] \quad \ldots \quad (8).$$

Wenn die Senkung der Punktes in der Mitte f ist, so ist nach (8)

$$f = \frac{Pl^3}{48\,EJ} \quad \ldots \quad (9).$$

Wir können also auch schreiben

$$y = f\left\{4\left(\frac{x}{l}\right)^3 - 6\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 1\right\} \quad \ldots \quad (10).$$

Wenn nun der Balken eine Schwingungsbewegung ausführt und die Ordinate des Punktes in der Mitte zur Zeit t gleich η ist, so muß auf Grund der oben aufgestellten Annahme die Ordinate für einen beliebigen Punkt x im rechtseitigen Feld im selben Augenblick

$$y = \eta\left\{4\left(\frac{x}{l}\right)^3 - 6\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 1\right\} \quad \ldots \quad (11)$$

sein. Wir erhalten nun, wenn wir außerdem die Symmetrieverhältnisse beachten:

$$V = \frac{144\,EJ\eta^2}{l^4}\int_0^{l/2}\left(\frac{2x}{l} - 1\right)^2 dx = \frac{24\,EJ}{l^3}\eta^2 \quad \ldots \quad (12).$$

Wir setzen zur Abkürzung $\frac{dy}{dt} = \dot{\eta}$ und finden hiernach für die kinetische Energie den Ausdruck

$$L = \frac{M}{l}\dot{\eta}^2\int_0^{l/2}\left\{4\left(\frac{x}{l}\right)^3 - 6\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 1\right\}^2 dx = \frac{17\,M}{70}\dot{\eta}^2 \quad \ldots \quad (13).$$

Die zum mittleren Punkt des Balkens gehörende Reduktionsziffer für die Masse ist sonach

$$\varkappa = \frac{17}{35} \quad \ldots \quad (14).$$

Wir wollen nun die Größe der rotationskinetischen Energie am Balken abschätzen. Wenn α der Winkel ist, den die Tangente der elastischen Linie im Punkte x mit der positiven Richtung der x-Achse bildet, so hat man, wie leicht zu finden ist, die genannte Energie

$$L' = \frac{\gamma J}{2g}\int_{-l/2}^{+l/2}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)^2 dx \quad \ldots \quad (15).$$

Hierbei bedeutet γ das spezifische Gewicht des Balkens. Nun ist

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{\partial y}{\partial x} \quad \ldots \quad (16),$$

woraus hervorgeht

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial t} \sim \frac{\partial^2 y}{\partial x\partial t} \quad \ldots \quad (17).$$

Also wird

$$L' = \frac{\gamma J}{2g}\int_{-l/2}^{+l/2}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial t}\right)^2 dx = 144\,\frac{\gamma J\dot{\eta}^2}{gl^4}\int_0^{l/2}\left(\frac{x^2}{l} - x\right)^2 dx = \frac{12}{5}\frac{\gamma J}{gl}\dot{\eta}^2 \quad \ldots \quad (18).$$

L' entspricht sonach der translatorischen kinetischen Energie für eine in der Mitte angebrachte Masse von der Größe

$$\mu = \frac{24}{5}\frac{\gamma J}{gl} \quad \ldots \quad (19).$$

Man findet nun leicht $$\frac{\mu}{\varkappa M} = \frac{168}{17}\left(\frac{k}{l}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad (20).$$

In (20) bedeutet k den Trägheitshalbmesser des Balkenquerschnittes in bezug auf die neutrale Achse. Für einen rechteckigen Querschnitt z. B. ist $k = \frac{h}{\sqrt{12}}$, wobei h die Höhe ist, und wir erhalten in diesem Falle $\frac{\mu}{\varkappa M} = \frac{14}{17}\left(\frac{h}{l}\right)^2$. Nun ist in allen praktisch vorkommenden Fällen $\frac{h}{l}$ ein kleiner Bruch, woraus folgt, daß μ gegenüber $\varkappa M$ vernachlässigt werden darf. Eine ähnliche Betrachtung läßt sich für andere Querschnittsformen mit gleichem Ergebnis durchführen.

Noch ist Φ zu bestimmen. Wir finden mit Hilfe von (4) und (11)

$$\Phi = 288\,\frac{FI\dot{\eta}^2}{l^4}\int_0^{l/2}\left(\frac{2x}{l}-1\right)^2 dx = \frac{48\,FI}{l^3}\,\dot{\eta}^2 \quad . \quad . \quad . \quad (21).$$

Wenn wir nun die in (6) angedeuteten Differentiationen ausführen, so erhalten wir nach kleineren Umformungen die Bewegungsgleichung des Balkens in der Gestalt

$$Y = \varkappa M\ddot{\eta} + \frac{48\,FI}{l^3}\,\dot{\eta} + \frac{48\,EI}{l^3}\,\eta \quad . \quad . \quad . \quad (22).$$

Wir nehmen an, daß die Bewegung des Balkens so zustande kommt, daß das Gewicht Q von der Höhe H auf den Balken fällt und diesen in der Mitte trifft. Wir betrachten den Stoß als unelastisch und rechnen die Zeit von dem Augenblick an, in dem die Stoßperiode zu Ende ist. Die Bewegung des Balkens nach dem Stoß wird durch die Differentialgleichung (22) geregelt, wo Y nunmehr den Druck des Fallgewichtes gegen den Balken bedeutet. Aber offenbar gilt auch Gleichung

$$Q - Y = \frac{Q}{g}\,\ddot{\eta} \quad . \quad . \quad . \quad (23).$$

Durch Addition von (22) und (23) kann Y weggeschafft werden und man findet

$$Q = \left(\frac{Q}{g} + \varkappa M\right)\ddot{\eta} + \frac{48\,FI}{l^3}\,\dot{\eta} + \frac{48\,EI}{l^3}\,\eta \quad . \quad . \quad . \quad (24).$$

4. Das allgemeine Integral der Bewegungsgleichung. Als nächste Aufgabe bietet sich nunmehr die Integration von (24). Wir setzen zu diesem Zwecke

$$\eta = f + \zeta \quad . \quad . \quad . \quad (25),$$

wo f ein geeigneter Festwert ist. Man findet durch Einsetzen in (24), daß

$$f = \frac{Ql^3}{48\,EI} \quad . \quad . \quad . \quad (26),$$

gewählt werden kann. f ist dann nichts anderes als die vom Gewicht Q verursachte statische Einbiegung. (Siehe Gl. (9)). — Für ζ erhalten wir gleichzeitig die Differentialgleichung

$$\left(\frac{Q}{g} + \varkappa M\right)\ddot{\zeta} + \frac{48\,FI}{l^3}\,\dot{\zeta} + \frac{48\,EI}{l^3}\,\zeta = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (27).$$

Wir führen nun zwei Werte a und b ein, die durch die Gleichungen

$$a = \frac{24\,FI}{\left(\frac{Q}{g} + \varkappa M\right)l^3}, \quad b = \sqrt{\frac{48\,EI}{\left(\frac{Q}{g} + \varkappa M\right)l^3}} \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

dargestellt sind und können dann (27) schreiben in der Form

$$\ddot{\zeta} + 2a\,\dot{\zeta} + b^2\,\zeta = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (29).$$

Wir führen weiter eine Funktion z ein, die durch die Gleichung

$$\zeta = e^{-at}\,z \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

gegeben ist und finden durch Einsetzen in (29) folgende Differentialgleichung für z:

$$\ddot{z} + (b^2 - a^2)\,z = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (31).$$

Wir beschränken uns im weiteren auf die Betrachtung des Falles $b > a$. Die Fälle $b \lesseqgtr a$ sind nämlich nicht von praktischer Bedeutung. Wenn wir weiter eine positive Größe

$$\omega = \sqrt{b^2 - a^2} \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

einführen, so können wir (31) in der Form

$$\ddot{z} + \omega^2 z = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (33)$$

schreiben und erhalten durch Integration

$$z = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad \ldots \ldots \ldots \quad (34).$$

A und B sind Integrationsfestwerte. Mit Hilfe von (25) und (30) finden wir darnach

$$\eta = f + e^{-at} (A \sin \omega t + B \cos \omega t) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (35).$$

Die Gl. (35) zeigt, daß die Bewegung des Balkens eine gedämpfte harmonische Schwingung ist mit der Periode

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{b^2 - a^2}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (36).$$

Aus (35) finden wir durch Differentiation und Zusammenlegung gleichartiger Ausdrücke

$$\dot{\eta} = -e^{-at} \{(aA + \omega B) \sin \omega t - (\omega A - aB) \cos \omega t\} \quad \ldots \ldots \quad (37).$$

Wenn nun die Werte für η und $\dot{\eta}$ zum Beispiel für $t = 0$ gegeben sind, so liefern uns (35) und (37) die nötigen Gleichungen für Bestimmung der Festwerte A und B.

5. Berechnung der Stoßwirkung. Wir nehmen an, daß für $t = 0$:

$$\eta = 0, \; \dot{\eta} = \dot{\eta}_0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (38).$$

Wir erhalten das System

$$f + B = 0, \; \omega A - aB = \dot{\eta}_0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (39),$$

das aufgelöst für A und B ergibt

$$A = \frac{\dot{\eta}_0 - af}{\omega}, \quad B = -f \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (40).$$

Also wird

$$\eta = f + \frac{e^{-at}}{\omega} \{(\dot{\eta}_0 - af) \sin \omega t - \omega f \cos \omega t\} \quad \ldots \ldots \quad (41)$$

und

$$\dot{\eta} = -\frac{e^{-at}}{\omega} \{(a \dot{\eta}_0 - b^2 f) \sin \omega t - \dot{\eta}_0 \, \omega \cos \omega t\} \quad \ldots \ldots \quad (42).$$

Gl. (42) sagt uns, daß η seinen ersten Größtwert im Zeitpunkte

$$t_1 = \frac{1}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{\omega \dot{\eta}_0}{a \dot{\eta}_0 - b^2 f} < \frac{\pi}{\omega} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (43)$$

bekommt.

Bei Beachtung der Formeln

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} \quad \ldots \ldots \quad (44)$$

finden wir hiernach aus (41) die Amplitude η_1. Eine kurze Rechnung liefert

$$\eta_1 = f \left(1 + \frac{e^{-at_1}}{b} \sqrt{\omega^2 + \left(\frac{\dot{\eta}_0 - af}{f}\right)^2}\right) \quad \ldots \ldots \quad (45).$$

Wenn das Gewicht auf den Balken ohne Anfangsgeschwindigkeit zu wirken beginnt, d. h. wenn $H = 0$ ist, so ist auch $\dot{\eta}_0 = 0$ und Gl. (43) gibt uns

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (46),$$

wonach aus (45) (unter Beachtung von (32)) hervorgeht:

$$\eta_1 = f \left(1 + e^{-\frac{\pi a}{\omega}}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (47).$$

Unter Stoßwertziffer versteht man das Verhältnis zwischen dynamischen und statischen Einbiegungen bei gleichem Gewicht Q. Bezeichnet man diese Stoßwertziffer mit n, so gibt uns (47) für den betrachteten Fall

$$n = 1 + e^{-\frac{\pi a}{\omega}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (48).$$

Aus (48) geht hervor, daß $n < 2$, daß es aber wächst, wenn F abnimmt, so daß man hat

$$\lim_{F=0} n = 2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (49).$$

Wir kommen mit (49) auf den Satz von Poncelet zurück: Bei Fehlen einer Dämpfung ist die dynamische Einbiegung doppelt so groß wie die statische, falls die Belastung ohne Anfangsgeschwindigkeit in voller Größe plötzlich auftritt.

Wir betrachten hierauf den allgemeinen Fall, in dem das Gewicht Q mit der Geschwindigkeit v den Balken in seiner Mitte trifft. Die Geschwindigkeit v ist keineswegs gleichbedeutend mit $\dot{\eta}_0$; vielmehr muß $\dot{\eta}_0$ aus v nach den Gesetzen berechnet werden, die für den Stoß von Körpern gelten.

Wir nehmen an, daß Gl. (22) auch während der Stoßperiode τ gilt. Y bezeichnet den Stoßdruck auf den Balken. Wie schon früher betont wurde, wollen wir den Stoß als unelastisch betrachten. Weiterhin ist zu beachten, daß die Einbiegung des Balkens während der genannten Periode unmerklich klein ist. Durch Multiplikation von (22) mit dt und Integration zwischen 0 und τ folgt daher

$$\int_0^\tau Y\,dt = \varkappa\,M\,\dot{\eta}_0 \quad \text{. . . . . (50).}$$

Anderseits muß auch sein

$$\int_0^\tau Y\,dt = \frac{Q}{g}\,(v - \dot{\eta}_0) \quad \text{. . . . . (51).}$$

Gl. (50) und (51) geben zusammengestellt

$$\dot{\eta}_0 = \frac{Q\,v}{\varkappa\,G + Q} = \frac{Q\sqrt{2\,g\,H}}{\varkappa\,G + Q} \quad \text{. . . . . (52).}$$

Dabei bedeutet G das Gewicht des Balkens. — Gl. (43), (45) und (52) setzen uns instand, die dynamische Einbiegung η_1, die der Fallhöhe H für das Gewicht Q entspricht, zu berechnen. Man erhält insbesondere

$$f_1 = \lim_{F=0} \eta_1 = f\left(1 + \sqrt{1 + \frac{48\,E\,I}{l^3}\,\frac{2\,H}{Q + \varkappa\,G}}\right) \quad \text{. . . . . . (53).}$$

Wir kommen mit Gl. (53) auf die Gessnersche Formel für die dynamische Einbiegung zurück.

Aus Gl. (53) kann anderseits auch die Höhe berechnet werden, aus der Q herabfallen muß, um eine Einbiegung f_1 im Balken zustande zu bringen. Wünschen wir jedoch die Fallhöhe unter Berücksichtigung der inneren Dämpfung zu berechnen, so finden wir, daß sich dies allgemein nicht machen läßt und zwar wegen der transzendenten Eigenschaft der Gl. (45). Da indes eine Berechnung der genannten Höhe mit Rücksicht auf die Anwendung bei der Stoßprobe wichtig ist, so tritt die Frage auf, ob Gl. (45) eine hierfür dienliche Annäherung ohne nennenswerte Einbuße an Genauigkeit zuläßt. Um diese Frage beantworten zu können, müssen wir uns über die Zahlenverhältnisse klar sein, die bei der Stoßprobe bestehen. Außerdem muß die Dissipationszahl ihrer Größe nach bekannt sein.

6. Bericht über Versuche zur Ermittlung der Dissipationszahl. Hier ist nun der Platz, um über das Verfahren von Honda und Konno, F zu bestimmen, wie auch über die Versuchsergebnisse zu berichten[1]).

Die genannten Forscher benutzten dünne Bänder aus den Metallen, welche untersucht werden sollten. Das eine Ende eines solchen Bandes wurde in einem Schraubstock festgeklemmt, so daß es lotrecht herabhing, während das untere Ende mit einem Bleigewicht beschwert wurde, um die Frequenz der Biegungsschwingungen, in die das Band durch einen kleinen Stoß versetzt wurde, herabzusetzen. Die Dissipationszahl konnte nun aus dem logorithmischen Dekrement für die genannten Schwingungen bestimmt werden. Die Versuche wurden in luftverdünntem Raum ausgeführt. Für F wurden bei Zimmertemperatur folgende Werte (in 10^8 C. G. S.-Einheiten) erhalten: Kupfer 4,83, Aluminium 0,822, Nickel 3,05, Messing 1,55, Stahl 5 bis 7. Auffallend hoch war der Wert für gewalztes Zink, nämlich 27,4. Während die Werte von F für die kaltbearbeiteten Metalle mit der Schwingungsamplitude sich nur unbedeutend veränderten, nahm der Dämpfungswiderstand bei den ausgeglühten Metallbändern mit der Amplitude stark zu.

R. Plank hat schon im Jahre 1912 eine Abhandlung veröffentlicht: »Betrachtungen über dynamische Zugbeanspruchung«, in der er ebenfalls auf die innere Dämpfung Bezug

[1]) Der Verfasser gibt hierzu einen kurzen Bericht aus der Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 1, 1921, S. 481 wieder. Die ursprüngliche Abhandlung von Honda und Konno war ihm leider nicht zugänglich.

[2]) Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1912, S. 17.

nimmt. Der Stab wird bei den Plankschen Versuchen auf Zug beansprucht; Plank nimmt an, daß die Dehnung in jedem Querschnitt die gleiche sei und benutzt für die Beanspruchung den Ansatz:

$$P = \frac{Eq}{l}\, x + \mu \frac{dx}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha).$$

Hier bedeutet q die Fläche und l die Länge des Stabes; x ist die Verlängerung desselben im Zeitpunkt t. Man gelangt offenbar von (1) auf (α) dadurch, daß man die erstere Gleichung mit q multipliziert und die Gleichstellungen

$$P = q\,\sigma \quad \ldots\ldots \quad (\beta) \qquad \text{und} \qquad \varepsilon = \frac{x}{l} \quad \ldots\ldots \quad (\gamma)$$

beachtet. Zwischen den Werten μ und F geht daraus die Beziehung hervor:

$$\mu = \frac{Fq}{l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\delta).$$

Die Plank sche Versuchsanordnung war kurz folgende: der Stab, der untersucht werden soll, ist an beiden Enden mit einem Kopf versehen, von denen der obere in ein Querstück eingeklemmt wird, während das Fallgewicht frei auf dem unteren ruht. Das Fallgewicht ist mit Gleitstücken versehen, die je in einer lotrechten Rinne laufen, wodurch erreicht wird, daß die Bewegung genau lotrecht bleibt. Die beiden Laufschienen sind in der Mitte untereinander durch einen schweren Klotz verbunden, der mit einer Oeffnung versehen ist, durch die das Gewicht unbehindert fallen kann, während das obengenannte Querstück gegen eine Kante der Oeffnung anschlägt. Dabei wird die Bewegung aufgehalten und die kinetische Energie des Fallgewichtes wird als Formänderungsarbeit auf den Stab überführt. Das Fallgewicht ist mit einem Schreibstift versehen, der leicht auf einer Walze mit lotrechter Achse aufliegt. Die Walze dreht sich mit einer bekannten Geschwindigkeit und durch die Kurven, die der Stift hierbei auf der Manteloberfläche der Walze aufzeichnet, kann die Bewegung des Fallgewichtes bequem studiert werden. An der Schaulinie ist besonders die Dehnungsphase von Interesse. Aus dem betreffenden Kurvenstück erhält man x als Abhängige von t, weiter $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{d^2x}{dt^2}$, sonach auch $M\frac{d^2x}{dt^2} = -P$, wenn M die Masse des Fallgewichtes ist. Damit sind alle Angaben vorhanden, die erforderlich sind, um mit Hilfe von x den Wert μ zu berechnen. Der gleiche Wert kann übrigens auch aus der Lage für den Größtwert in der ersten Halbschwingung ermittelt werden.

Die Plankschen Probestäbe waren aus Eisen und hatten eine reduzierte Länge von 22,5 cm und einen Durchmesser = 1 cm. Für μ erhielt Plank auf dem angegebenen Wert 6,85 kgsk/cm. Das gibt für die Dissipationszahl den Wert $F = \frac{6{,}85 \cdot 22{,}5 \cdot 4}{\pi}$ $= 196{,}2$ kgsk/cm², was von den von Honda und Konno für Stahl gefundenen Werten bedeutend abweicht. Es hat also den Anschein, als ob die stoffliche Beschaffenheit (Kohlenstoffgehalt) in hohem Grade auf die Größe des genannten Moduls einwirken würde. Die hierher gehörigen Verhältnisse näher zu erörtern, scheint dem Verfasser eine wichtige Aufgabe für die Versuchsforschung zu sein.

7. Durchrechnung eines Zahlenbeispiels. Wir nehmen an, daß die Schiene, die durch eine Stoßprobe untersucht werden soll, ein laufendes Gewicht von 30 kg/m besitzt und ein Querschnittsträgheitsmoment, auf die neutrale Achse bezogen, $J = 734$ cm⁴. Der Abstand zwischen den Stützpunkten soll 1 m sein und das Fallgewicht $Q = 1000$ kg. Die Elastizitätszahl des Schienenstoßes soll $= 2 \cdot 10^6$ kg/cm² angenommen werden. Für die Dissipationszahl rechnen wir auf Grund der Versuche von Honda und Konno mit einem Mittelwert $F = 600$ kgsk/cm². Wir haben zu Beginn auf Grund von (26) und (28)

$$af = \frac{gF}{2E}\left(\frac{Q}{\varkappa G + Q}\right) < \frac{gF}{2E} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (54).$$

Setzt man die Zahlenwerte ein, so findet man $af < \frac{981 \cdot 600}{2 \cdot 2 \cdot 10^6} = 0{,}15$ cm/sk. Verglichen mit den Geschwindigkeiten, welche bei der Stoßprobe vorkommen, ist also af eine Größe, die ohne weiteres vernachlässigt werden kann. Wir rechnen weiter

$$Q + \varkappa G = 1000 + \frac{17}{35} \cdot 30 = 1014{,}6 \text{ kg},$$

$$a = \frac{24 \cdot 600 \cdot 981 \cdot 734}{1014{,}6 \cdot 100^3} = 10{,}2 \text{ sk}^{-1} \quad \text{und} \quad b = \sqrt{\frac{48 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 981 \cdot 734}{1014{,}6 \cdot 100^3}} = 261{,}0 \text{ sk}^{-1}.$$

Wir haben also $a < b$, wie es die Entwicklungen in Absatz 5. und 6. voraussetzen. Wir finden nun $\omega = \sqrt{b^2 - a^2} = 260{,}8\ \mathrm{sk}^{-1}$. Ein Vergleich zwischen b und ω besagt uns, daß die Dämpfung auf die Frequenz keine nennenswerte Einwirkung hat. Für die Periode der Schwingungen finden wir im übrigen den Wert $T = \frac{2\pi}{260{,}8} = 0{,}02$ sk.

Die durch den Stoß verursachten Schwingungen der Schiene sind also recht schnell. Man findet leicht, daß für

$$\dot{\eta}_0 = \frac{b^2 f}{2a} = \frac{Q l^3}{48 F J} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (55),$$

dem nach (52) eine Fallhöhe

$$H_1 = \frac{l^6}{2g}\left(\frac{Q + \varkappa G}{48 F J}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (56)$$

entspricht, deren Bogen

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{\omega\dot{\eta}_0}{a\dot{\eta}_0 - b^2 f} = \pi - \operatorname{arc\,tg}\frac{\omega}{a} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (57)$$

ist. Andererseits ist

$$\lim_{\dot{\eta}_0 = \infty} \varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{\omega}{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (58).$$

Nun ist bei den vorliegenden Anordnungen

$$H_1 = \frac{100^6}{2 \cdot 981}\left(\frac{1014{,}6}{48 \cdot 600 \cdot 734}\right)^2 = 1{,}2 \text{ cm}.$$

Weiter ist $\operatorname{arc\,tg}\frac{260{,}8}{10{,}2} = 87^0\ 45' = 1{,}53$ abs. Einh.

Bei Stoßproben wählt man stets $H > H_1$. Wir sehen also, daß bei ihnen der Bogen in nächster Nähe von $\frac{\pi}{2}$ liegt. In bezug auf den genannten Bogen haben wir es also im vorliegenden wie in allen ähnlichen Fällen mit dem festen Mittelwert $\frac{\pi}{2}$ zu tun. Weiter kann, wie wir sehen, der Unterschied zwischen ω und b vernachlässigt werden. Unter Beachtung aller dieser Umstände geht nun die Formel (45) über in

$$\eta_1 = f\left(1 + e^{-\frac{\pi a}{2b}}\sqrt{1 + \frac{48 E J}{l^3}\,\frac{2H}{Q + \varkappa G}}\right) \quad \ldots\ldots \quad (59),$$

sofern wir gleichzeitig den Wert von $\dot{\eta}_0$ aus (52) einführen. Ein Vergleich von (53) und (59) besagt uns, daß der Einfluß der Dämpfung sich wesentlich darin äußert, daß der zweite Ausdruck im **Geßner**schen Klammerausdruck mit $e^{-\frac{\pi a}{2b}}$ multipliziert wird.

Mit der Einbiegung des Balkens wächst der absolute Betrag der Dehnung in jeder Faser, die nicht der neutralen Schichte angehört. Wenn die Formänderung keine dauernde werden soll, so darf die genannte Dehnung nirgends einen von der stofflichen Beschaffenheit des Balkens abhängigen kritischen Wert überschreiten. Mit der Dehnung ist indes die **Hooke**sche Spannung verhältnisgleich. Wir gelangen sonach zu der Grundaufgabe: Bestimme die Höhe, von der das Gewicht Q auf den Balken fallen darf, um in der Mitte der äußersten Faser die amplitudale **Hooke**sche Spannung σ hervorzurufen.

Der Abstand der äußersten Faser von der neutralen Achse mag s sein. Die Formeln (2) und (11) im Verein geben uns dann

$$\sigma = E s \left|\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}\right|_{x=0} = \frac{12 E s}{l^2}\,\eta_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (60).$$

Durch Ausschaltung von η_1 aus (59) und (60) kann H berechnet werden. Man findet

$$H = \frac{(Q + \varkappa G) l^3}{96 E J}\left\{\left(\frac{4\sigma J}{Q l s} - 1\right)^2 e^{\frac{\pi a}{b}} - 1\right\} \quad \ldots\ldots \quad (61).$$

Die Gleichung (61) kann mit einer für praktische Zwecke genügenden Genauigkeit durch eine einfachere Formel ersetzt werden. Wenn wir nämlich amplitudale Spannungen betrachten, die nahe bei der zur Elastizitätsgrenze gehörigen Spannung liegen, so ist in vielen Fällen $\frac{4\sigma J}{Q l s}$ groß gegenüber 1. Sehen wir in solchen Fällen vom zweiten

Ausdruck in der Einschaltung und vom zweiten Ausdruck in der Klammer ab, so gibt uns Gl. (61), sofern gleichzeitig die Werte für a und b eingeführt werden

$$H = \frac{\sigma^2 J l}{6 E s^2}\left(\frac{Q + \varkappa G}{Q^2}\right) e^{\frac{2\pi F}{l}\sqrt{\frac{3 g J}{l E (Q + \varkappa G)}}} \qquad (62).$$

Aus (62) findet man nun

$$\mathfrak{h} = \lim_{F=0} H = \frac{\sigma^2 J l}{\sigma E s^2}\left(\frac{Q + \varkappa G}{Q^2}\right) \qquad (63).$$

Wir können dafür auch kurz schreiben

$$H = \mathfrak{h} e^{\frac{\pi a}{b}} \qquad (64).$$

Hierin ist $\mathfrak{h}$ die in der Weisbachschen Theorie auftretende Fallhöhe. Durch den Einfluß der inneren Dämpfung wird also die Weisbachsche Fallhöhe um

$$p = 100\,(e^{\frac{\pi a}{b}} - 1)\ \text{vH} \qquad (65)$$

vermehrt.

Wir wollen die Formel (65) auf unsere Schiene anwenden. Wir finden bei Einsetzung der schon ausgerechneten Werte für a und b

$$p = 100\,(e^{\frac{\pi\, 10{,}2}{261}} - 1) = 13\ \text{vH}.$$

Der von der inneren Dämpfung verursachte prozentuelle Zuwachs der Fallhöhe ist sonach eine Größe, die auch technisch zu beachten ist. Für den künftigen Gebrauch dürfte also die Weisbachsche Formel durch die Formel (62), gegebenenfalls (61) ersetzt werden.

Was die Anwendung von (62) bezw. (61) bei der Stoßprobe betrifft, so ist folgendes weiter hervorzuheben. Wir setzen in einer der genannten Formeln für σ den Wert, der der Elastizitätsgrenze entspricht, und erhalten dadurch den entsprechenden Wert für H. Von dieser Höhe soll nun die Schiene einen Schlag des Fallgewichtes Q aushalten, ohne eine dauernde Formänderung zu erleiden. Aendert die Schiene dauernd ihre Form oder bricht sie sogar ab, so ist der Schienenstoff als minderwertig zu erklären und die untersuchte Charge muß gegebenenfalls zurückgewiesen werden. In die genannte Formel $\sigma = \sigma_B$ einzusetzen und sonach die »Bruchhöhe« zu berechnen, ist dagegen völlig unzulässig, weil unser Grundansatz (1), bevor der Bruch eintritt, seine Gültigkeit verliert.

8. Kinetische Energie des Balkens. In diesem Abschnitt soll die kinetische Energie L (die dem Balken durch einen lotrechten, nach unten gerichteten Stoß in dessen Mitte mitgeteilt wird) bestimmt werden, die einer amplitudaien Hookeschen Spannung σ in der Mitte der äußersten Faser entspricht. Wird der Balken dämpfungsfrei angenommen, so entspricht dem gleichen σ ein anderer Wert $\mathfrak{L}$ für die kinetische Energie. Der Quotient $\frac{L}{\mathfrak{L}}$ mißt den stärkenden Einfluß der inneren Dämpfung auf die Festigkeit des Balkens.

Wir haben nun folgendes zu beachten. Für die Stoßperiode gilt die Gleichung (22). Für die Bewegung des Balkens nach dem Stoß gilt hinwiederum die Differentialgleichung

$$\frac{17}{35} M \ddot{\eta} + \frac{48 F J}{l^3}\dot{\eta} + \frac{48 E J}{l^3}\eta = 0 \qquad (66).$$

Wir führen die abkürzenden Bezeichnungen

$$a = \frac{24 F J}{\varkappa M l^3}, \qquad b = \sqrt{\frac{48 E J}{\varkappa M l^3}} \qquad (67)$$

ein, womit (66) übergeht in

$$\ddot{\eta} + 2 a \dot{\eta} + b^2 \eta = 0 \qquad (68).$$

Die Anfangsbedingungen sind

$$\eta_0 = 0, \qquad \dot{\eta}_0 = \sqrt{\frac{2 L}{\varkappa M}} \qquad (69).$$

Die Lösung von (68) erhält man aus (41) dadurch, daß man $f = 0$ setzt und zugleich den Wert für $\dot{\eta}_0$ aus (69) einführt. Man findet sonach

$$\eta = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2L}{\varkappa M}}\, e^{-at} \sin \omega t \quad \ldots \ldots \ldots \quad (70).$$

Die stärkste Einbiegung tritt in dem Zeitpunkte ein

$$t_1 = \frac{1}{\omega} \operatorname{arc\,tg} \frac{\omega}{a} < \frac{\pi}{2\omega} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (71),$$

was aus (43) hervorgeht, wenn man $f = 0$ setzt. Für die größte Einbiegung findet man hiernach aus (45) den Ausdruck

$$\eta_1 = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{2L}{\varkappa M}}\, e^{-\frac{a}{\omega} \operatorname{arc\,tg} \frac{\omega}{a}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (72).$$

Wird (72) mit der Formel $\sigma = \frac{12\, E\sigma}{l^2}\, \eta_1 \ldots (60)$ zusammengestellt, so erhält man die Gleichung für die Berechnung von L. Man findet

$$L = \frac{\sigma^2 J l}{\sigma E s^2}\, e^{\frac{2a}{\omega} \operatorname{arc\,tg} \frac{\omega}{a}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (73).$$

Wäre der Balken dämpfungsfrei, so hätte man offenbar

$$\mathfrak{L} = \frac{\sigma^2 J l}{6\, E s^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (74).$$

Also erhält man

$$\frac{L}{\mathfrak{L}} = e^{\frac{2a}{\omega} \operatorname{arc\,tg} \frac{\omega}{a}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (75).$$

Das Verhältnis zwischen den Anfangsenergien ist also von σ unabhängig. Aus dem Gesetz der Erhaltung der Energie folgt unmittelbar, daß $\mathfrak{L}$ gleich der potentiellen Energie ist, die der Einbiegung η_1 entspricht. Hieraus schließen wir, daß während der Zeit t_1, vom Beginn gerechnet, die Arbeit

$$A = L - \mathfrak{L} = L\left(1 - e^{-\frac{2a}{\omega} \operatorname{arc\,tg} \frac{\omega}{a}}\right) \quad \ldots \ldots \quad (76)$$

in Wärme überführt wird. Der Faktor

$$r = 1 - e^{-\frac{2a}{\omega} \operatorname{arc\,tg} \frac{\omega}{a}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (77),$$

der ebenfalls von σ unabhängig ist, kann als Maß für den reduzierenden Einfluß der Dämpfung auf die Stoßwirkung genommen werden.

Wir wollen wieder die erhaltenen Formeln auf unsere früher schon betrachtete Schiene anwenden. Aus (67) geht hervor, daß der Wert a mit l^{-3} abnimmt. Es ist daher von besonderer Bedeutung, zu untersuchen, ob bei einer größeren Länge des Balkens die innere Dämpfung sich noch in einem merklichen Grade geltend zu machen vermag. Wir wählen also diesmal $l = 3\, m$ und finden hiernach

$$a = \frac{24 \cdot 35 \cdot 981 \cdot 600 \cdot 734}{17 \cdot 90 \cdot 300^3} = 8{,}8\ \mathrm{sk}^{-1} \quad \text{und} \quad b = \sqrt{\frac{48 \cdot 35 \cdot 981 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 734}{17 \cdot 90 \cdot 300^3}} = 242{,}0\ \mathrm{sk}^{-1}.$$

Also wird $\qquad \omega = \sqrt{b^2 - a^2} = 241{,}8\ \mathrm{sk}^{-1}$.

Die Einwirkung der Dämpfung auf die Frequenz ist also auch jetzt unbedeutend. Wir finden weiter $\operatorname{arc\,tg} \frac{241{,}8}{8{,}8} = 87^0\, 55' = 1{,}53$ abs. Einh. Folglich erhält man $\frac{L}{\mathfrak{L}} = e^{\frac{2 \cdot 8{,}8 \cdot 1{,}53}{241{,}8}} = 1{,}12$. Die Anfangsenergie wächst also auf Grund der inneren Dämpfung um 12 vH.

Schließlich finden wir

$$r = 1 - e^{-\frac{2 \cdot 8{,}8 \cdot 1{,}53}{241{,}8}} = 0{,}11.$$

Während der Zeit t_1, vom Bewegungsbeginn gerechnet, werden also 11 vH der Anfangsenergie in Wärme überführt. Die erhaltenen Werte zeigen, daß die innere Dämpfung trotz der Länge des Balkens einen bemerkenswerten Einfluß ausübt.

9. Beiderseits eingespannter Balken. Wir gehen nun dazu über, des Vergleiches halber die im vorhergehenden Artikel behandelte Aufgabe unter der Voraussetzung zu lösen, daß der Balken beiderseits eingespannt ist. Als erste Aufgabe tritt da wieder die Bestimmung der Ausdrücke für L, V und Φ auf. Die Differentialgleichung für die elastische Linie ist im rechtseitigen Felde $\left(0 \rightarrow \frac{l}{2}\right)$

$$E J \frac{d^2 y}{d x^2} = -\frac{P}{2}\left(\frac{l}{2} - x\right) + \mathfrak{M} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (78),$$

wenn die Last P ebenso wie im früheren Falle in Balkenmitte angreift. $\mathfrak{M}$ ist das Biegungsmoment an der Befestigungsstelle. Die Bedingung $\frac{dy}{dx} = 0$, sowohl für $x = 0$ als $x = \frac{l}{2}$, erlaubt uns sowohl den ersten Integrationsfestwert wie auch $\mathfrak{M}$ zu bestimmen. Man findet leicht

$$\mathfrak{M} = \frac{P l}{8} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (79).$$

Beobachten wir weiter, daß $y = 0$ für $x = \frac{l}{2}$ ist, so finden wir nach einer einfachen Rechnung

$$y = f\left[3\left(1 - \frac{2x}{l}\right)^2 - 2\left(1 - \frac{2x}{l}\right)^3\right] \quad \ldots \quad (80), \quad \text{wobei } f = \frac{P l^3}{192 \, E J} \quad \ldots \quad (81)$$

ist. Aus (80) geht unmittelbar hervor, daß f die Einbiegung in Balkenmitte ist. Auf unsere frühere Annahme über die Balkenform während der Schwingungsbewegung gestützt, können wir auch für $0 \leq x \leq \frac{l}{2}$ schreiben:

$$y = \eta\left[3\left(1 - \frac{2x}{l}\right)^2 - 2\left(1 - \frac{2x}{l}\right)^3\right] \quad \ldots \ldots \quad (82),$$

wobei η wie früher die Ordinate der Balkenmitte zurzeit t bedeutet. Hiernach erhalten wir mit Hilfe von Gl. (5) und unter Beachtung der Symmetrie

$$L = \frac{M \dot{\eta}^2}{l} \int_0^{l/2} \left[3\left(1 - \frac{2x}{l}\right)^2 - 2\left(1 - \frac{2x}{l}\right)^3\right]^2 dx = \frac{13}{70} M \dot{\eta}^2 \quad \ldots \quad (83).$$

Der Reduktionsfaktor für die auf die Mitte bezogene Masse des Balkens ist also

$$\varkappa = \frac{13}{35} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (84).$$

Die reduzierte Masse bei Einspannung ist demnach $\frac{13}{17}$ von der gleichen Masse bei freier Auflage des Balkens.

Für V finden wir den Ausdruck:

$$V = 576 \frac{E J \eta^2}{l^4} \int_0^{l/2} \left[1 - 2\left(1 - \frac{2x}{l}\right)\right]^2 dx = \frac{96 \, E J}{l^3} \eta^2 \quad \ldots \quad (85).$$

Bei der gleichen Senkung der Mitte ist also die potentielle Energie bei Einspannung 4 mal so groß als bei freier Auflage des Balkens. Schließlich gibt uns die Gl. (4)

$$\Phi = 1152 \frac{F J \dot{\eta}^2}{l^4} \int_0^{l/2} \left[1 - 2\left(1 - \frac{2x}{l}\right)\right]^2 dx = \frac{192 \, F J}{l^3} \dot{\eta}^2 \quad \ldots \quad (86).$$

Ein Vergleich mit (21) zeigt uns, daß bei der gleichen Geschwindigkeit der Mitte, die im Zeitelement dt in Wärme überführte Arbeit bei der Einspannung 4 mal so groß ist als bei freier Auflage des Balkens. Für die Bewegung nach dem Stoß gilt nun die Differentialgleichung

$$\frac{13}{35} M \ddot{\eta} + \frac{192 \, F J}{l^3} \dot{\eta} + \frac{192 \, E J}{l^3} \eta = 0 \quad \ldots \ldots \quad (87).$$

Werden die abkürzenden Bezeichnungen

$$a = \frac{96 \, F J}{\varkappa M l^3}, \qquad b = \sqrt{\frac{192 \, E J}{\varkappa M l^3}} \quad \ldots \ldots \quad (88)$$

eingeführt, so geht (87) in eine Gleichung über, die der Form nach mit (68) gleich ist. Für die Amplitude η_1 erhalten wir auch jetzt den Ausdruck

$$\eta_1 = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{2L}{\varkappa M}}\, e^{-\frac{a}{\omega}\operatorname{arc\,tg}\frac{\omega}{a}} \quad \ldots\ldots\ldots (89).$$

Was die Amplitudalspannung σ betrifft, so gibt uns (2) und (82) im Verein die Formel

$$\sigma = E\,s\left|\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}\right|_{x=0} = \frac{24\,E\,s}{l^2}\,\eta_1 \quad \ldots\ldots\ldots (90).$$

Eine Ausscheidung von η_1 aus (89) und (90) gibt uns die Gleichung für die Berechnung von L. Man findet als Ergebnis

$$L = \frac{\sigma^2\, l\, J}{\sigma\, E\, s^2}\, e^{\frac{2a}{\omega}\operatorname{arc\,tg}\frac{\omega}{a}} \quad \ldots\ldots\ldots (91),$$

also wiederum einen Ausdruck, der der Form nach mit (73) übereinstimmt. Die Formel für die Arbeit A bleibt also ebenfalls der Form nach gleich mit (76).

Wir wollen nun die Formel (91) zahlenmäßig auf die Schiene im vorigen Artikel anwenden. Aus einem Vergleich zwischen den Systemen (67) und (88) geht hervor, daß

$$a = \frac{68}{13}\,8{,}8 = 50{,}0 \text{ sec}^{-1},\quad b = \sqrt{\frac{68}{13}}\cdot 242{,}0 = 553{,}5 \text{ sec}^{-1} \text{ und } \omega = \sqrt{b^2 - a^2} = 551{,}6 \text{ sec}^{-1} \text{ ist.}$$

Eine nennenswerte Einwirkung auf die Frequenz übt auch jetzt die innere Dämpfung nicht aus. Wir finden weiter

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{551{,}6}{50{,}0} = 85^0\,14' = 1{,}49 \text{ abs. Einh. Also wird } \frac{L}{\mathfrak{L}} = e^{\frac{2\,.\,50{,}0\,.\,1{,}49}{551{,}6}} = 1{,}28.$$

Infolge des Vorhandenseins der inneren Dämpfung erhöht sich also die σ entsprechende Anfangsenergie um 28 vH. Schließlich erhält man $r = 1 - e^{-\frac{2\,.\,50{,}0\,.\,1{,}49}{551{,}6}} = 0{,}22$. Es bedeutet dies, daß während der Zeit t_1, vom Anfang gerechnet, 22 vH der kinetischen Energie in Wärme überführt worden sind. Ein Vergleich mit den entsprechenden Zahlen im vorigen Artikel zeigt uns, daß die innere Dämpfung sich nunmehr in höherem Grade geltend macht als bei freier Auflage des Balkens. Daß dies nicht nur für den oben betrachteten Fall seine Gültigkeit hat, sondern immer gilt, soll im folgenden Artikel bewiesen werden.

10. Vergleich zwischen dem frei aufliegenden und dem eingespannten Balken. Wir wollen jetzt $\varkappa'$, a', b', ω' und L' an Stelle der entsprechenden ungestrichenen Buchstaben im vorigen Abschnitt schreiben. Ein Vergleich zwischen (67) und (88) liefert uns, wie schon bemerkt, die folgenden Beziehungen

$$\frac{a'}{a} = \frac{68}{13};\quad \frac{b'}{b} = \sqrt{\frac{68}{13}} \quad \ldots\ldots\ldots (92).$$

Hieraus folgt

$$\frac{a'}{\omega'} = \frac{\frac{68}{13}a}{\sqrt{\frac{68}{13}b^2 - \left(\frac{68\,a}{13}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{\frac{68}{13}}}{\sqrt{b^2 - \left(a\sqrt{\frac{68}{13}}\right)^2}} > \frac{a}{\omega} \quad \ldots\ldots (93).$$

Aus Gl. (91) und (73) folgt durch Division

$$\frac{L'}{L} = e^{2\left(\frac{a'}{\omega'}\operatorname{arc\,tg}\frac{\omega'}{a'} - \frac{a}{\omega}\operatorname{arc\,tg}\frac{\omega}{a}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots (94).$$

Wir setzen nun $\frac{a}{\omega} = x$ und betrachten die Funktion

$$\varphi(x) = x \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x} \quad \ldots\ldots\ldots (\alpha).$$

Man hat $\varphi(0) = 0$. Für alle positiven Werte von x ist $\varphi(x) > 0$. Weiter ist $\lim_{x=\infty}\varphi(x) = 1$. Die Funktion $\varphi(x)$ hat die erste Abgeleitete

$$\varphi'(x) = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \quad \ldots\ldots\ldots (\beta)$$

und die zweite Abgeleitete

$$\varphi''(x) = \frac{-2}{(1+x^2)^2} \quad \ldots\ldots\ldots (\gamma).$$

Aus (γ) folgt, daß $\varphi' x$ ständig abnimmt. Nun ist weiter $\varphi'(0) = \frac{\pi}{2}$ und $\lim\limits_{x=\infty} \varphi'(x) = 0$. Hieraus schließen wir, daß $\varphi'(x)$ stets > 0 ist, m. a. W. die Funktion $\varphi(x)$ wächst mit ihrem Argument.

Das gefundene Ergebnis können wir unmittelbar anwenden. Bei Beachtung der Ungleichung (93) folgt nämlich jetzt aus (94) der Satz: Durch Einspannung erhöht sich die Anfangsenergie, die der Hookeschen Spannung σ in der Mitte der äußersten Faser entspricht.

Bei Anwendung auf unsere Schiene finden wir $\frac{L'}{L} = \frac{1{,}28}{1{,}12} = 1{,}14$. Durch Einspannung wird also die σ entsprechende Anfangsenergie um 14 vH erhöht.

11. Einseitig eingespannter Balken. In diesem Abschnitt wollen wir den einseitig eingespannten Balken unter der Voraussetzung untersuchen, daß das andere Ende frei ist. Zuerst haben wir wieder die Gleichung für die elastische Linie zu bestimmen. Die Differentialgleichung derselben beruht auf der Voraussetzung einer ruhenden Belastung Q am freien Ende

$$E J \frac{d^2 y}{d x^2} = Q (l - x) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (95).$$

Wird der Koordinatenanfang in die Befestigungsstelle verlegt, so ist für $x = 0$ sowohl $y = 0$ wie $\frac{d y}{d x} = 0$. Dieser Umstand läßt uns die beiden Festwerte bestimmen, die bei Integration von (95) auftreten. Man findet als Rechnungsergebnis

$$y = \frac{f}{2}\left[3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \left(\frac{x}{l}\right)^3\right] \quad \ldots \quad (96), \quad \text{wo } f = \frac{Q\,l^3}{3\,E\,J} \quad \ldots \ldots \quad (97).$$

Aus (97) geht hervor, daß f die Einbiegung am freien Ende ist. Wenn der Balken eine Schwingungsbewegung ausführt und die augenblickliche Einbiegung am freien Ende η ist, so ist die Ordinate für einen beliebigen Punkt der elastischen Linie im gleichen Augenblick auf Grund unserer Annahme

$$y = \frac{\eta}{2}\left[3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \left(\frac{x}{l}\right)^3\right] \quad \ldots \ldots \ldots \quad (98).$$

Für die kinetische Energie finden wir auf dieser Grundlage den Ausdruck

$$L = \frac{M \dot{\eta}^2}{8} \int\limits_0^l \left\{3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \left(\frac{x}{l}\right)^3\right\}^2 d x = \frac{33}{280} M \dot{\eta}^2. \quad \ldots \ldots \quad (99).$$

Die Reduktionsziffer für die Balkenmasse auf das freie Ende bezogen, ist sonach

$$\varkappa = \frac{33}{140} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (100).$$

Für die potentielle Energie erhalten wir hier hinwiederum die Formel

$$V = \frac{9\,E J \eta^2}{2\,l^4} \int\limits_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 d x = \frac{3\,E J}{2\,l^3} \eta^2. \quad \ldots \ldots \quad (101).$$

Schließlich wird die Funktion

$$\Phi = \frac{9\,F J \dot{\eta}^2}{l^4} \int\limits_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 d x = \frac{3\,F J}{l^3} \dot{\eta}^2 \quad \ldots \ldots \quad (102).$$

Die Aufgabe, die hier gelöst werden soll, wollen wir folgendermaßen in Worte kleiden: Der einseitig eingespannte Balken ist an seinem freien Ende durch das Gewicht Q belastet. Man erteilt diesem Gewicht einen Stoß in Richtung lotrecht abwärts. Bestimme die Anfangsenergie für Q, die dem Wert n des dynamischen Faktors entspricht.

Wenn das Balkengewicht gegenüber Q klein ist, wie wir hier voraussetzen wollen, so kann dessen kinetische Energie gegenüber $\frac{Q}{g}$ vernachlässigt werden. Für die Bewegung des Balkens nach dem Stoß erhalten wir dann durch Betrachtungen, die denen in Artikel **3** gleichen, die folgenden Differentialgleichung:

$$Q = \frac{Q}{g} \ddot{\eta} + \frac{3\,F J}{l^3} \dot{\eta} + \frac{3\,E J}{l^3} \eta \quad \ldots \ldots \quad (103).$$

Wir führen die abkürzenden Bezeichnungen

$$a = \frac{3\,g\,F\,l}{2\,Q\,l^3}, \qquad b = \sqrt{\frac{3\,g\,E\,J}{Q\,l^3}} \quad \ldots \ldots \ldots (104)$$

ein. Die allgemeine Lösung von (103) wird dann nach (35)

$$\eta = f + e^{-at}\{A \sin \omega t + B \cos \omega t\} \quad \ldots \ldots (105),$$

wo f den in (97) angegebenen Wert hat. Die Anfangsbedingungen sind hier:

$$\eta_0 = f, \qquad \dot{\eta}_0 = \sqrt{\frac{2\,g\,L}{Q}} \quad \ldots \ldots \ldots (106).$$

Die Gleichungen (105) und (37) geben auf dieser Grundlage

$$A = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2\,g\,L}{Q}}, \qquad B = 0 \quad \ldots \ldots \ldots (107)$$

und (105) geht über in

$$\eta = f + \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2\,g\,L}{Q}}\, e^{-at} \sin \omega t \quad \ldots \ldots \ldots (108).$$

Für die Amplitude η_1 finden wir hiernach den Ausdruck

$$\eta_1 = f + \frac{1}{b}\sqrt{\frac{2\,g\,L}{Q}}\, e^{-\frac{a}{\omega}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{\omega}{a}} \quad \ldots \ldots \ldots (109).$$

Den Anforderungen der Aufgabe gemäß soll nun

$$\eta_1 = n\,f \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (110)$$

sein. Wird η_1 aus (109) und (110) weggeschafft, so erhält man die Gleichung für die Berechnung von L; man findet

$$L = \frac{(n-1)^2 f\,Q}{2}\, e^{\frac{2a}{\omega}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{\omega}{a}} \quad \ldots \ldots \ldots (111).$$

Durch den Einfluß der inneren Dämpfung wird also die n entsprechende Anfangsenergie erhöht um

$$p = 100\left(e^{\frac{2a}{\omega}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{\omega}{a}} - 1\right) \mathrm{vH} \quad \ldots \ldots \ldots (112).$$

Auch die Formel (111) soll durch ein Zahlenbeispiel erläutert werden. Wir wählen $n = 5$, $l = 1$ m, $J = 734$ cm^4 und $Q = 200$ kg. Für F und E nehmen wir die früheren Werte 600 kgsk/cm^2, bezw. $2 \cdot 10^6$ kg/cm^2 an. Wir erhalten nun

$$f = \frac{200 \cdot 100^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 734} = 0{,}05 \text{ cm}, \qquad a = \frac{3 \cdot 981 \cdot 600 \cdot 734}{2 \cdot 200 \cdot 100^3} = 3{,}2 \text{ sk}^{-1},$$

$$b = \sqrt{\frac{3 \cdot 981 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 734}{200 \cdot 100^3}} = 147 \text{ sk}^{-1}, \quad \omega \sim b.$$

Hieraus folgt $\mathrm{arc\,tg}\,\frac{147{,}0}{3{,}2} \sim \frac{\pi}{2}$ und sonach wird $L = \frac{4^2 \cdot 0{,}05 \cdot 200}{2}\, e^{\frac{3{,}2\,\pi}{147{,}0}} = 85{,}6$ kg cm.

Wäre der Balken dämpfungsfrei, so hätte man $\mathfrak{L} = \frac{4^2 \cdot 0{,}05 \cdot 200}{2} = 80$ kg cm. Die Zunahme $= 5{,}6$ kg cm macht 7 vH aus. Beim einseitig eingespannten Balken vermag die innere Dämpfung sich also nur in geringerem Grade geltend zu machen.

Von besonderem Interesse ist es, den einseitig eingespannten Balken von gleichbleibendem Querschnitt mit dem sog. Blasiusschen Balken zu vergleichen, den wir im folgenden erörtern wollen.

12. Der Balken kleinster Durchbiegung. Blasius hat als erster folgende Aufgabe gestellt[1]):

Aus einer gegebenen Stoffmenge soll ein einseitig eingespannter Balken mit kreisförmigem Querschnitt geformt werden. Der Balken wird am freien Ende belastet und soll die kleinstmögliche Durchbiegung aufweisen. Die Gesetze für den Durchmesser des Querschnitts sind anzugeben.

[1]) S. z. B. Wittenbauer: Aufgaben aus der technischen Mechanik, Bd. II, dritte Aufl., Aufgabe 206.

Wir wollen hier die Aufgabe etwas abändern und einen Balken mit rechteckigem Querschnitt und gleichbleibender Breite betrachten (Abb. 2).

Vor allem tritt die Aufgabe auf, die Form eines solchen Balkens zu bestimmen. Man geht folgendermaßen vor: Wir benutzen das gleiche Achsenkreuz wie in Artikel (**11**) und erhalten, wenn J das Trägheitsmoment in bezug auf die Neutralachse für den Querschnitt x und Q die Belastung am freien Balkenende ist, folgende Differentialgleichung für die elastische Linie:

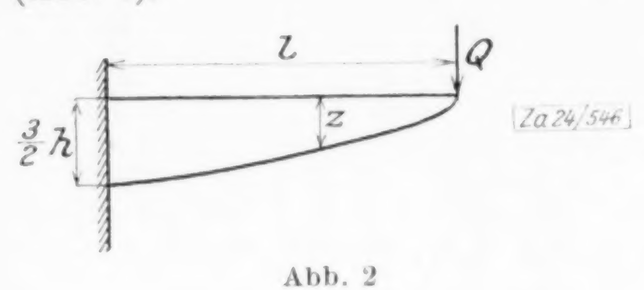


Abb. 2

$$E\,J_x \frac{d^2 y}{d x^2} = Q\,(l - x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (113).$$

Wenn b die gegebene Breite des Querschnitts ist und z seine Höhe, so hat man

$$J_x = \frac{b\,z^3}{12} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (114).$$

Wir bezeichnen die Mittelhöhe der Querschnitte mit h und führen ein entsprechendes Trägheitsmoment

$$J = \frac{b\,h^3}{12} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (115)$$

ein. Unter Benutzung von (114) und (115) erhalten wir dann

$$\frac{E\,J}{h^3}\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{Q\,l}{z^3}\left(1 - \frac{x}{l}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (116).$$

Eine zweimalige Integration gibt nun, wenn wir bedenken, daß für $x = 0$ sowohl $y = 0$, wie $\frac{d y}{d x} = 0$ ist,

$$\frac{E\,J}{h^3}\,y = Q\,l\int_0^x d\,x \int_0^x \left(1 - \frac{x}{l}\right)\frac{d\,x}{z^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (117).$$

Aus (117) erhält man die Einbiegung dadurch, daß man für das äußere Integral die obere Grenze gleich Null setzt. Wird gleichzeitig partielle Integration angewendet, so findet man

$$f = \frac{Q\,h^3\,l^2}{E\,J}\int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \frac{d\,x}{z^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (118).$$

Jetzt gilt auch die Gleichung

$$h = \frac{1}{l}\int_0^l z\,d x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (119).$$

Die Einbiegung f soll hier zu einem Kleinstwert gemacht werden unter gleichzeitiger Beachtung der Bedingung (119). Dann gelten die Gleichungen

$$\partial f = 0, \qquad \partial h = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (120).$$

Werden die Variationen ausgeführt, so erhält man

$$\int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \frac{\partial z}{z^4}\,d\,x = 0 \quad \ldots \quad (\alpha) \qquad \text{und} \qquad \int_0^l \partial\,z\,d x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\beta).$$

Die Gleichungen (α) und (β) sind miteinander nur vereinbar, wenn

$$\frac{z^4}{\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2} = \text{konst} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\gamma)$$

oder mit anderen Worten

$$z = c\sqrt{1 - \frac{x}{l}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (121)$$

ist, wobei c ebenfalls ein Festwert ist, der durch die Bedingung (119) bestimmt wird. Setzt man nämlich (121) in das Integral rechts ein, so erhält man nach angestellter Rechnung $c = {}^3/_2\, h$ und darnach

$$z = \frac{3h}{2}\sqrt{1-\frac{x}{l}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (122).$$

Das Gesetz für die Höhe des Querschnitts ist damit gefunden. Wir sehen, daß ein lotrechter (Längs-) Schnitt durch den Balken parallel zur Achse durch eine Parabel begrenzt wird, deren Scheitel mit dem freien Balkenende zusammenfällt und deren Achse längs der Balkenachse liegt.

Durch Einsetzung von (122) in (118) finden wir für f den Ausdruck

$$f = \frac{8\,Q\,l^2}{27\,E\,J}\int_0^l \sqrt{1-\frac{x}{l}}\,d\,x = \frac{16\,Q\,l^3}{81\,E\,J} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (123).$$

Ein Vergleich mit (97) besagt uns, daß die Einbiegung des freien Endes beim Blasiusschen Balken ${}^{16}/_{27}$ von der gleichen Einbiegung beim entsprechenden gleichhohen Balken ausmacht.

Wir setzen weiter (122) ein in (117) und finden

$$y = \frac{8\,Q\,l}{27\,E\,J}\int_0^x d\,x\int_0^x \frac{d\,x}{\sqrt{1-\frac{x}{l}}} = \frac{16\,Q\,l^3}{27\,E\,J}\left\{{}^1/_3 - \left(1-\frac{x}{l}\right) + {}^2/_3\left(1-\frac{x}{l}\right)^{3/2}\right\} \quad . \quad (124).$$

Unter Beachtung des Wertes von f können wir auch schreiben:

$$y = 3\,f\left\{{}^1/_3 - \left(1-\frac{x}{l}\right) + {}^2/_3\left(1-\frac{x}{l}\right)^{3/2}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (125).$$

Mit Hilfe von (2) und (125) erhalten wir nun für die Normalspannung σ im Querschnitt x im Abstand s von der Neutralachse folgenden Ausdruck:

$$\sigma = E\,s\left|\frac{d^2 y}{d\,x^2}\right| = \frac{3\,E\,f\,s}{2\,l^2\sqrt{1-\frac{x}{l}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (126).$$

Wird hier insbesondere $s = \frac{z}{2}$ eingesetzt, so erhält man unter Beachtung von (122)

$$\sigma = \frac{9\,h\,f\,E}{8\,l^2} = \text{konst.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (127).$$

(127) gibt uns den bemerkenswerten Satz: Der Blasiussche Balken ist zugleich ein überall gleichstarker Balken.

13. Die Dämpfung beim Balken kleinster Durchbiegung. In diesem Abschnitt werden wir zuerst in allgemeiner Form die schon in **11** aufgestellte Aufgabe lösen. Wir haben da folgendes zu beachten: Durch Ausschaltung von Q aus (117) und (118) erhalten wir die Gleichung für die elastische Linie mit f als Parameter

$$y = \frac{f}{l}\,\frac{\int_0^x d\,x\int_0^x\left(1-\frac{x}{l}\right)\frac{d\,x}{z^3}}{\int_0^l\left(1-\frac{x}{l}\right)^2\frac{d\,x}{z^3}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (128).$$

Wenn der Balken sich in Schwingungsbewegung befindet, so gilt auf Grund unserer Annahme in gleicher Weise

$$y = \frac{\eta}{l}\,\frac{\int_0^x d\,x\int_0^x\left(1-\frac{x}{l}\right)\frac{d\,x}{z^3}}{\int_0^l\left(1-\frac{x}{l}\right)\frac{d\,x}{z^3}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (129).$$

Gl. (3) gibt uns hiernach unter Berücksichtigung des veränderlichen Trägheitsmomentes (114)

$$V = \frac{E}{2}\int_0^l J_x \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2 d\,x = \frac{E\,b\,\eta^2}{24\,l^2} \cdot \frac{1}{\int_0^l \left(1-\frac{x}{l}\right)^2 \frac{d\,x}{z^3}} \quad \ldots \ldots \quad (130).$$

In gleicher Weise gibt uns (4)

$$\Phi = F\int_0^l J_x \left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^2\,\partial t}\right)^2 d\,x = \frac{F\,b\,\dot{\eta}^2}{12\,l^2} \cdot \frac{1}{\int_0^l \left(1-\frac{x}{l}\right)^2 \frac{d\,x}{z^3}} \quad \ldots \ldots \quad (131).$$

Wir führen einen Wert K ein, der durch die Gleichung

$$K = \frac{E\,b}{12\,l^2}\,\frac{1}{\int_0^l \left(1-\frac{x}{l}\right)^2 \frac{d\,x}{z^3}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (132)$$

gegeben ist und können dann schreiben

$$V = \frac{K}{2}\,\eta^2 \ldots (133), \qquad \text{und ebenso} \quad \Phi = \frac{K\,F}{E}\,\dot{\eta}^2 \ldots (134).$$

Vernachlässigen wir das Eigengewicht des Balkens, so gibt uns das Gesetz von der Erhaltung der Energie folgende Differentialgleichung für die Bewegung:

$$Q = \frac{Q}{g}\,\ddot{\eta} + \frac{K\,F}{E}\,\dot{\eta} + K\,\eta \quad \ldots \ldots \ldots \quad (135).$$

Wir führen hiernach die verkürzenden Bezeichnungen

$$a = \frac{g\,K\,F}{2\,Q\,E}, \qquad b = \sqrt{\frac{g\,K}{Q}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (136)$$

ein. Dadurch daß wir Q genügend groß wählen, erhält man immer $b > a$ und in diesem Falle treten bei Gleichgewichtsstörung Schwingungen am Balken auf. Für das logarithmische Dekrement bei diesen Schwingungen erhalten wir den Ausdruck

$$\lambda = a\,T = \frac{2\,\pi\,a}{\sqrt{b^2 - a^2}} = 2\,\pi \sqrt{\frac{K}{\frac{Q}{g}\left(\frac{2\,E}{F}\right)^2 - K}} \quad \ldots \ldots \quad (137).$$

Aus (137) geht hervor, daß λ mit K wächst. Anderseits lehrt uns (132), daß die gleiche Funktion z, die bei Beachtung der Bedingung (119) f zu einem Mindestwert macht, umgekehrt K zu einem Größtwert macht. Wir haben hiermit den eleganten Satz gefunden: Von allen einseitig eingespannten Balken gleicher Länge, gleichen Stoffinhaltes und gleicher stofflicher Beschaffenheit zeigt bei vorgeschriebener Belastung am freien Ende der Blasiussche Balken das größte logarithmische Dekrement.

Wir führen nun in das Integral in (132) die Funktion (122) ein und finden da

$$K = \frac{E\,b}{12\,l^2}\,\frac{27\,h^3}{8} \cdot \frac{1}{\int_0^l \sqrt{\left(1-\frac{x}{l}\right)}\,d\,x} = \frac{81\,E\,J}{16\,l^3} \quad \ldots \ldots \quad (138),$$

woraus hervorgeht, daß

$$V = \frac{81\,E\,I}{32\,l^3}\,\eta^2 \ldots \ldots (139) \qquad \text{und} \qquad \Phi = \frac{81\,F\,I}{16\,l^3}\,\dot{\eta}^2 \ldots \ldots (140)$$

ist. Weiter erhalten wir

$$a = \frac{81\,g\,F\,I}{32\,Q\,l^3}, \qquad b = \sqrt{\frac{81\,g\,F\,I}{16\,Q\,l^3}} \quad \ldots \ldots \quad (141).$$

Für die dem Werte n des dynamischen Faktors entsprechende Anfangsenergie erhalten wir hiernach den mit (111) der Form nach gleichen Ausdruck

$$L = \frac{(n-1)^2\,f\,Q}{2}\,e^{\frac{2\,\alpha}{\omega}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{\omega}{\alpha}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (142).$$

Der von der inneren Dämpfung verursachte anteilige Zuwachs der Anfangsenergie wird angegeben durch den Ausdruck (112), in dem a und b die in (141) angegebenen Werte haben.

14. Kinetische Energie beim Balken kleinster Durchbiegung. Wir wollen zuletzt noch das Verhältnis zwischen den Anfangsenergien für den Blasiusschen Balken und den entsprechenden gleich hohen Balken bestimmen, die der gleichen Amplitudalspannung σ in der äußersten Faser bezw. in der äußersten Faser an der Einspannungsstelle entsprechen. Wir schreiben daher wieder a', b', ω', f', n' und L' an Stelle der entsprechenden ungestrichelten Werte im vorhergehenden Artikel. Unter Beachtung der Gl. (2), (98) und (127) wird folgende Beziehung zwischen $n' f'$ und $n f$ erhalten:

$$\frac{9\,h\,E}{8\,l^4}\,n'\,f' = \frac{3\,h\,E}{2\,l^4}\,n f \quad \ldots \ldots \ldots \quad (143).$$

Nach Einführung der Werte für f' und f folgt aus (143):

$$n' = \frac{9}{4}\,n \quad \ldots \ldots \ldots \quad (144).$$

Wir erhalten nun

$$\frac{L'}{L} = \frac{16}{27}\left(\frac{n'-1}{n-1}\right)^2 \cdot e^{\frac{2\,\alpha'}{\omega'}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{\omega'}{\alpha'} - \frac{2\,\alpha}{\omega}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{\omega}{\alpha}} \quad \ldots \ldots \quad (145).$$

Ein Vergleich zwischen den Systemen (104) und (141) zeigt uns, daß

$$\frac{a'}{a} = \frac{27}{16}\,; \qquad \frac{b'}{b} = \sqrt{\frac{27}{16}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (146)$$

ist. Also ist

$$\frac{a'}{\omega'} = \sqrt{\frac{27}{16}}\,\frac{a}{\sqrt{b^2 - \frac{27}{16}\,a^2}} > \frac{a}{\omega} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (147).$$

Auf Grund des in Artikel 10 bewiesenen Satzes ist sonach

$$\varphi\left(\frac{a'}{\omega'}\right) > \varphi\left(\frac{a}{\omega}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (148).$$

Weiter ist, wie leicht zu zeigen ist, auf Grund von (144): $\frac{n'-1}{n-1} > \frac{n'}{n} = \frac{9}{4}$.

Folglich muß

$$\frac{L'}{L} > 3 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (149)$$

sein.

Die der Amplitudalspannung σ entsprechende Anfangsenergie ist beim Blasiusschen Balken **mehr als dreimal so groß** als die gleiche Energie beim entsprechenden gleich hohen Balken.

Die Formeln (112) und (145) wollen wir auch auf ein Zahlenbeispiel anwenden. Wir betrachten einen Balken, für den der in Artikel 11 betrachtete den entsprechenden gleich hohen Balken bildet und erhalten dann

$$a' = \frac{27}{16} \cdot 3{,}2 = 5{,}5\ \mathrm{sk}^{-1}, \quad b' = \sqrt{\frac{27}{16}} \cdot 147{,}0 = 190{,}9\ \mathrm{sk}^{-2}, \quad \omega' = \sqrt{b'^2 - a'^2} = 190{,}3\ \mathrm{sk}^{-1}$$

Hieraus folgt $\mathrm{arc\,tg}\,\frac{190{,}3}{5{,}5} \sim \frac{\pi}{2}$.

Der von der inneren Dämpfung verursachte Zuwachs in der Anfangsenergie wird $p = 100\left(e^{\frac{\pi\,5{,}5}{190{,}3}} - 1\right) = 9$ vH. Die Zunahme ist also etwas größer als beim entsprechenden gleich hohen Balken. Dieses Ergebnis konnten wir übrigens auf Grund der Ungleichung (148) voraussehen.

$$\frac{L'}{L} = \frac{16}{27}\left(\frac{41}{16}\right)^2 \cdot e^{\pi\left(\frac{5{,}5}{190{,}3} - \frac{3{,}2}{147{,}0}\right)} = 3{,}97.$$

Bei den hier durchgeführten Untersuchungen hat die Annahme von der statischen Form des Balkens eine grundlegende Rolle gespielt. Man könnte sich fragen, mit welcher Genauigkeit diese Annahme in der Wirklichkeit erfüllt ist. Diese Aufgabe will der Verfasser in einem weiteren Aufsatz erörtern. In diesem sollen auch, was die Stoßprobe betrifft, die Verhältnisse während der Periode τ näher untersucht werden. 360

Über die Stabilität eines Kreisbogens unter gleichmäßigem radialem Druck.[1]

Von **PAUL FUNK** in Prag.

Die Knicklast für einen Kreisbogen, der unter der Einwirkung eines radial von außen überall gleichmäßig wirkenden Druckes steht und entweder a) beiderseits fest eingespannt oder b) gelenkig gelagert ist, wurde, wie es scheint, bis auf die unter [1]) genannte russische Abhandlung in der Literatur nirgends in einer vollkommen einwandfreien Weise berechnet[2]). Insbesondere muß man wohl die Tatsache, daß bei der Knickung in der Mitte des Kreisbogens ein Wendepunkt der elastischen Linie eintritt, aus der Theorie selbst entnehmen können, ohne sich bei der Begründung auf Anschauung oder Versuch zu berufen[3]).

Die folgenden Darlegungen gehen vom Dirichletschen Prinzip aus[4]), wonach Stabilität einer Gleichgewichtslage dann und nur dann vorhanden ist, wenn die potentielle Energie ein Minimum ist. Wenn also die Gleichgewichtslage stabil sein soll, so muß jeder virtuellen Verschiebung aus der Gleichgewichtslage ein Zuwachs an potentieller Energie entsprechen.

1. Aufstellung des Energieausdrucks. Ein Punkt des Kreisbogens (Abb. 1) sei in der Ausgangslage gekennzeichnet durch die Polarkoordinaten $r = a$ und φ. Der Zentriwinkel des Bogens sei 2α, $\varphi = 0$ entspreche der Mitte des Bogens, ferner sei E der Elastizitätsmodul J das Trägheitsmoment des Querschnittes um die Querachse durch den Schwerpunkt, F der Flächeninhalt des Querschnittes. Nach der gedachten Verschiebung habe ein Punkt die Polarkoordinaten $r = a + \varrho$, $\psi = \varphi + \chi$, dabei sind ϱ und χ als Funktionen von φ zu betrachten.

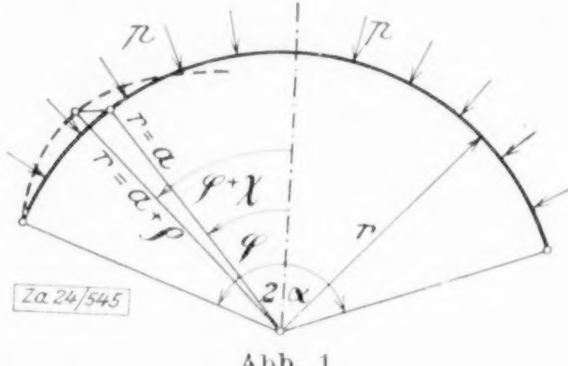


Abb. 1

Zur Untersuchung der aufgeworfenen Frage ist es gemäß der Theorie der zweiten Variation nur nötig den Ausdruck für die potentielle Energie A bis zur zweiten Potenz der kleinen Größen ϱ und χ zu entwickeln. Dieser Energieausdruck setzt sich zusammen aus drei Bestandteilen:

I. Die Energie A_1 infolge der Aenderung der Krümmung. Für den Krümmungshalbmesser nach der Verschiebung erhalten wir, wenn man nur die ersten Potenzen der kleinen Größen ϱ und χ berücksichtigt

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{a} - \frac{\ddot{\varrho} + \varrho}{a^2}.$$

Dabei bedeuten die Punkte Differentiationen nach φ. Somit erhalten wir für diesen Bestandteil der potentiellen Energie

$$A_1 = {}^1\!/_2\, E J \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{(\ddot{\varrho} + \varrho)^2}{a^3}\, d\varphi.$$

II. Die Deformationsenergie A_2 infolge der Längskräfte. Wenn p der auf der Längeneinheit des Kreisbogens lastende äußere Druck ist, so ist $N = pa$ die Längskraft auf jeden Querschnitt in der Ausgangslage. Ein Längenelement in der Ausgangslage $a\,d\varphi$

[1]) Nach Einsendung meiner Arbeit an die Schriftleitung entnahm ich dem Bericht des Herrn Nicolai, Bd. 3, 1923, S. 228 dieser Zeitschrift, und noch später der mir vom Verfasser gütigst zugesandten Arbeit (russisch), daß in dieser derselbe Gegenstand behandelt wird. Die Resultate stimmen überein. Die Ableitung ist aber eine andere. (Unmittelbar im Anschluß an Kirchhof-Clebsch ohne Variationsrechnung.)

[2]) Vergl. K. Federhofer, Sitzungsberichte der Wiener Akademie der Wissensch. 1909, math. naturw. Kl., Bd. 118, S. 1101. R. Mayer, Zeitschrift für Math. u. Phys. 61, 1913, S. 246.

[3]) R. Mayer, Die Knickfestigkeit, Berlin 1921, insbes. S. 119.

[4]) Bez. Stabilitätsbetrachtungen auf Grund des Dirichletschen Prinzips unter Anwendung der Theorie der zweiten Variation vergl. die Dissertation von M. Born, Göttingen 1906.

hat daher im ungedrückten Zustand die Länge $d s_0 = \frac{a\, d\varphi}{1 - N/EF}$. Wenn höhere Potenzen der kleinen Größe $\frac{N}{EF}$ vernachlässigt werden, erhalten wir

$$d s_0 = a\, d\varphi \left(1 + \frac{N}{EF}\right).$$

Für das Längenelement nach der virtuellen Verschiebung ergibt sich, wenn wir bis zur zweiten Ordnung von ϱ und χ entwickeln:

$$d s = \sqrt{\dot\varrho^2 + (a+\varrho)^2 (1+\dot\chi)^2}\, d\varphi = a\, d\varphi \left[1 + \left(\frac{\varrho}{a} + \dot\chi\right) + \left(\frac{\dot\varrho^2}{2a^2} + \frac{\dot\chi \varrho}{a}\right)\right].$$

Somit erhalten wir für die durch die Längskräfte verursachte Deformationsenergie:

$$A_2 = \frac{EF}{2}\int_{-\alpha}^{\alpha}\left(\frac{ds - ds_0}{a\, d\varphi}\right)^2 a\, d\varphi = \int_{-\alpha}^{\alpha}\left\{{}^1/_2 \frac{(pa)^2}{EF} - p a\left[\left(\frac{\varrho}{a} + \dot\chi\right) + \left(\frac{\dot\varrho^2}{2a^2} + \frac{\varrho\dot\chi}{a}\right)\right] + \frac{EF}{2}\left(\frac{\varrho}{a} + \dot\chi\right)^2\right\} a\, d\varphi.$$

III. Die durch die Arbeitsleistung der äußeren Kraft verursachte Energie A_3. Diese ergibt sich gleich dem Flächeninhalt der Fläche zwischen dem ursprünglichen Kreisbogen und der aus ihm nach der virtuellen Verschiebung hervorgegangenen Linie mulipliziert mit p. Wir erhalten also, wenn wir wieder bis zur zweiten Ordnung entwickeln:

$$A_3 = p\left[\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{(a+\varrho)^2}{2}(1+\dot\chi)\, d\varphi - \alpha a^2\right] = \int_{-\alpha}^{\alpha}\left[p\left(a\varphi + \frac{a^2\dot\chi}{2}\right) + p\left(\frac{\varrho^2}{2} + a\varrho\dot\chi\right)\right] d\varphi.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$a\chi = \xi \qquad \frac{p a^3}{EJ} = \mu \qquad \frac{a^2 F}{J} = K$$

und berücksichtigt man, daß wegen der festen Lage der Endpunkte

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\dot\chi\, d\varphi = 0$$

ist, so ergibt sich für die gesamte Energie, wenn man die von ϱ und ξ unabhängigen Glieder beiseite läßt

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = {}^1/_2 \frac{EJ}{a^4}\int_{-\alpha}^{\alpha}\{(\ddot\varrho + \varrho)^2 - \mu(\dot\varrho^2 - \varrho^2) + K(\varrho + \dot\xi)^2\}\, d\varphi.$$

Daß die ersten Potenzen von ϱ und ξ fehlen, hängt damit zusammen, daß die Ausgangslage eine Gleichgewichtslage ist. Soll diese Gleichgewichtslage stabil sein, so ist notwendig und hinreichend, daß für jede beliebige, mit den Grenzbedingungen verträgliche und den entsprechenden Differenzierbarkeitsbedingungen genügende Wahl der Funktionen ϱ und ξ, das soeben angeschriebene Integral A einen positiven Wert ergibt (ausgenommen für $\varrho = \xi = 0$). Um die Knicklast zu ermitteln, ist anzugeben für welche Werte von μ dies eintritt. Eine kleine Vereinfachung läßt sich durch folgende Ueberlegung erzielen. Da K eine sehr große Zahl ist, so wäre das letzte Glied von einem für das Vorzeichen des Ausdrucks A ausschlaggebenden Einfluß, d. h. unser Integral hätte einen positiven Wert, wenn nicht $\varrho + \dot\xi$ eine sehr kleine Größe wäre. Wir können daher bei der folgenden Untersuchung die vereinfachende Annahme machen:

$$\varrho + \dot\xi = 0.$$

Es kommt dies darauf hinaus, daß wir nur solche virtuelle Verschiebungen zulassen, bei denen die Länge der einzelnen Bogenelemente ungedehnt bleibt[1]) (in Uebereinstimmung mit der insbesondere von **Kirchhoff** entwickelten Theorie des elastischen Verhaltens dünner Stäbe). Somit gewinnen wir für den Energieausdruck die folgende einfachere Formel

$$A = \frac{EJ}{2a^3}\int_{-\alpha}^{\alpha}\{(\dddot\xi + \dot\xi)^2 - \mu(\ddot\xi^2 - \dot\xi^2)\}\, d\varphi.$$

[1]) Auf diese Schlußweise gedenke ich noch in einer späteren Mitteilung zurückzukommen.

2. Ableitung der Knickbedingung. Unsere Aufgabe ist es jetzt, zu untersuchen, für welche Werte von μ das Integral A beständig positiv bleibt, wobei ξ, je nachdem wir den Fall des eingespannten Bogens oder den Fall des beiderseits gelenkig gelagerten Bogens betrachten, verschiedenen Randbedingungen zu genügen hat.

Fall a) Eingespannter Bogen: Hier lauten die Randbedingungen:

$$\xi(\alpha) = \dot{\xi}(\alpha) = \ddot{\xi}(\alpha) = \xi(-\alpha) = \dot{\xi}(-\alpha) = \ddot{\xi}(-\alpha) = 0.$$

Nach den Methoden der Variationsrechnung hat man zunächst die Lagrangesche Gleichung zu bilden. Es ergibt sich

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{d^2}{d\varphi^2} + 1\right)\left(\frac{d^2}{d\varphi^2} + \nu^2\right)\xi = 0, \qquad \nu^2 = \mu + 1.$$

Da $\mu \neq 0$, so erhalten wir die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung in der Form

$$\xi = C_1 + C_2 \cos\varphi + C_3 \cos\nu\varphi + C_4\varphi + C_5 \sin\varphi + C_6 \sin\nu\varphi.$$

Die Knicklast ergibt sich aus dem niedrigsten Wert von ν, für den sich eine von Null verschiedene, den sechs Randbedingungen genügende Lösung dieser Differentialgleichung angeben läßt. Somit ergibt sich für ν die tranzendente Gleichung

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\nu\alpha & \alpha & \sin\alpha & \sin\nu\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & -\nu\sin\nu\alpha & 1 & \cos\alpha & \nu\cos\nu\alpha \\ 0 & -\cos\alpha & -\nu^2\cos\nu\alpha & 0 & -\sin\alpha & -\nu^2\sin\nu\alpha \\ 1 & \cos\alpha & \cos\nu\alpha & -\alpha & -\sin\alpha & -\sin\nu\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \nu\sin\nu\alpha & 1 & \cos\alpha & \nu\cos\nu\alpha \\ 0 & -\cos\alpha & -\nu^2\cos\nu\alpha & 0 & \sin\alpha & \nu^2\sin\nu\alpha \end{vmatrix} = 0.$$

Indem man in geeigneter Weise die ersten drei Zeilen zu den letzten drei Zeilen addiert, bezw. subtrahiert, erkennt man leicht, daß sich diese Gleichung auch in der Form schreiben läßt:

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & \sin\nu\alpha \\ \cos\alpha & \nu\cos\nu\alpha \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha & \sin\alpha & \sin\nu\alpha \\ 1 & \cos\alpha & \nu\cos\nu\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \nu^2\cos\nu\alpha \end{vmatrix} = 0,$$

dieses Zerfallen in zwei Faktoren entspricht offenbar dem Umstand, daß die unseren Randbedingungen und der Lagrangeschen Gleichung genügenden Lösungen ξ entweder gerade oder ungerade Funktionen sind.

Den Nullstellen des ersten Faktors entsprechen gerade Funktionen, den Nullstellen des zweiten Faktors entsprechen ungerade Funktionen. Daß die niedrigste Nullstelle eine Nullstelle des ersten Faktors ist, könnte man durch graphische Auflösung ermitteln, man kann dies aber auch durch folgende Ueberlegung einsehen. Wäre die den Randbedingungen entsprechende Lösung unserer Differentialgleichung eine ungerade Funktion, dann würde unser Energieausdruck auch negative Werte annehmen können. Wertet man nämlich den Energieausdruck in diesen Fall aus für eine Funktion, die etwa in der linken Hälfte des Intervalles eine von Null verschiedene der linken Randbedingung entsprechende Lösung der Lagrangeschen Gleichung darstellt und in der rechten Hälfte beständig Null ist, so ergibt sich für unsern Energieausdruck Null. (Um dies einzusehen, wende man in der bei der Theorie der zweiten Variation üblichen Weise partielle Integration an und berücksichtige, daß im angenommenen Fall die den Randbedingungen genügenden Lösungen der Lagrangeschen Gleichung ungerade Funktionen sind.) Diese mit Unstetigkeiten in den Differentialquotienten behaftete Funktion liefert aber sicher nicht den kleinsten Wert für den Energieausdruck. (Vergl. etwa den von H. A. Schwarz herrührenden Beweis für die Notwendigkeit des Jacobischen Kriteriums.) Eine Nullstelle des zweiten Faktors kommt also sicher nicht in Betracht, somit erhalten wir zur Bestimmung der Knicklast die niedrigste Wurzel der Bedingungsgleichung.

$$\underline{\nu \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\nu\alpha}\ ^{1)}$$

Fall (b). Gelenkig gelagerter Bogen: Hier lauten die Randbedingungen

$$\xi(\alpha) = \dot{\xi}(\alpha) = \dddot{\xi}\alpha) = \xi(-\alpha) = \dot{\xi}(-\alpha) = \dddot{\xi}(-\alpha) = 0$$

[1]) Bezüglich der numerischen Auflösung vgl. etwa Runge: Praxis der Gleichungen, Berlin-Leipzig 1921.

und auf Grund ganz ähnlicher Ueberlegungen ergibt sich für ν

$$\sin \nu \alpha = 0, \quad \nu = \frac{\pi}{\alpha}.$$

In beiden Fällen ergibt sich $\xi(\varphi)$ als gerade Funktion, d. h. also $\dot{\xi}(0) = \dddot{\xi}(0) = \ddot{\varrho}(0) = 0$, wodurch der Wendepunkt der elastischen Linie im Scheitel erwiesen ist.

Schließlich sei noch bemerkt, daß sich aus unserem Energieausdruck in der zuletzt angeschriebenen Form die Knicklast für den geschlossenen Kreisring[1]) sehr leicht ergibt, wenn man für ξ bezw. für $\dot{\xi}$ eine Fourier sche Reihe einsetzt.

Setzt man

$$\dot{\xi} = \sum_n a_n \cos n\varphi + \sum_n b_n \sin n\varphi,$$

so erhält man

$$A = \pi \sum_n \{(n^2 - 1)^2 + \mu (n^2 - 1)\} (a_n^2 + b_n^2) = \pi \sum_n (n^2 - 1)(n^2 - 1 - \mu)(a_n^2 + b_n^2)$$

und nun ist unmittelbar ersichtlich, daß für

$$\mu < 3$$

der Energieausdruck einen positiv definiten Charakter aufweist, aber für größere Werte auch negative Werte annehmen kann. 341

Über die Mises'sche Abbildung räumlicher Kräftesysteme.

Von **ERWIN KRUPPA** in Wien.

In einer Abhandlung: Graphische Statik räumlicher Kräftesysteme[2]) hat R. v. Mises eine überaus bemerkenswerte ebene Abbildung räumlicher Kräftesysteme mitgeteilt. Da diese Arbeit ganz vom Standpunkt der Statik geschrieben ist, erscheint es mir nicht überflüssig, den Versuch zu machen, die Abbildung in das Lehrgebäude der darstellenden Geometrie organisch einzuordnen. In der Entwicklung der darstellenden Geomotrie haben stets technische Anwendungsmöglichkeiten eine entscheidende Rolle gespielt. Fortschritte der darstellenden Geometrie, denen eine Anwendbarkeit fehlt, bleiben meist unbeachtet oder werden als außerhalb ihrer Grenzen befindlich gewertet. Durch die Aufdeckung eines Zusammenhanges der Mises'schen Abbildung mit neueren Bemühungen im Gebiete der darstellenden Geometrie hoffe ich auch, die Aufmerksamkeit der Fachgenossen auf einige Arbeiten zu lenken, in denen darstellende Geometrie auf neuen Wegen getrieben wird.

1. Die Netzprojektion. An die Spitze unsrer Betrachtung müssen wir die Netzprojektion stellen, ein Abbildungsverfahren, das bereits von J. Steiner[3]) (unter dem Namen schiefe Projektion) erwähnt, aber erst von L. Tuschel[4]) in die darstellende Geometrie eingeführt wurde. Wir leiten zunächst in elementarer Weise die Hauptsätze der Netzprojektion derart ab, daß sie als Modifikation einer Zentralprojektion erscheint.

Es sei o der Sehpunkt einer Zentralprojektion auf die Bildebene Π, Abb. 1. Jedem Sehstrahl G^0 ordnen wir einen Netzstrahl G^n durch folgende Konstruktion zu: Wir drehen den Schnittpunkt g_u^c des Sehstrahls mit der Bildebene um den Hauptpunkt h (Normalriß von o auf Π) durch -90^0 (Uhrzeigersinn) nach g_u^n und legen durch g_u^n die Parallele G^n zu G^0. Die aus dem Sehstrahlbündel in der angegebenen Weise hervorgehende Kongruenz der Strahlen $G^n = [g_u^n \| G^0]$[5]) ist ein Drehnetz, eine Benennung, die sofort ihre Rechtfertigung finden wird. Die Netzprojektion besteht darin, daß die Strahlen des Drehnetzes (G^n) zum Projizieren der Raumpunkte auf Π verwendet werden. Ist p

[1]) Literaturangaben finden sich in dem erwähnten Buch von R. Meyer.

[2]) Zeitschr. f. Math. Phys. 64 (1917), S. 209 bis 232.

[3]) Systematische Entwicklung usw. Berlin 1832, Nr. 59. Ges. Werke, Bd. 1, S. 409.

[4]) Ueber eine Schraubliniengeometrie und deren konstruktive Verwertung. Stzgsb. Ak. Wien, (mat.-nat.) IIa, 120 (1911), S. 233 ff. L. Tuschel nennt diese Abbildung, sowie ihren projektiv allgemeinen Fall windschiefe Projektion. Die Benennung Netzprojektion stammt von E. Müller, Ueber Punkttransformationen, die die Ebenen des Raumes in kongruente gerade Konoide mit parallelen Achsen überführen, Stzgsb. Ak. Wien, (mat.-nat.) IIa, 126 (1917), S. 915 bis 929.

[5]) Konstruktionssymbolik nach E. Müller, Lehrbuch der darstellenden Geometrie für techn. Hochschulen, Leipzig u. Berlin, 3. Aufl. 1920, I. Bd., S. 9 ff.

ein beliebiger, auf einem Netzstrahl G^n liegender Raumpunkt, so nennen wir den Schnittpunkt von G^n mit Π den Netzriß p^n von p.

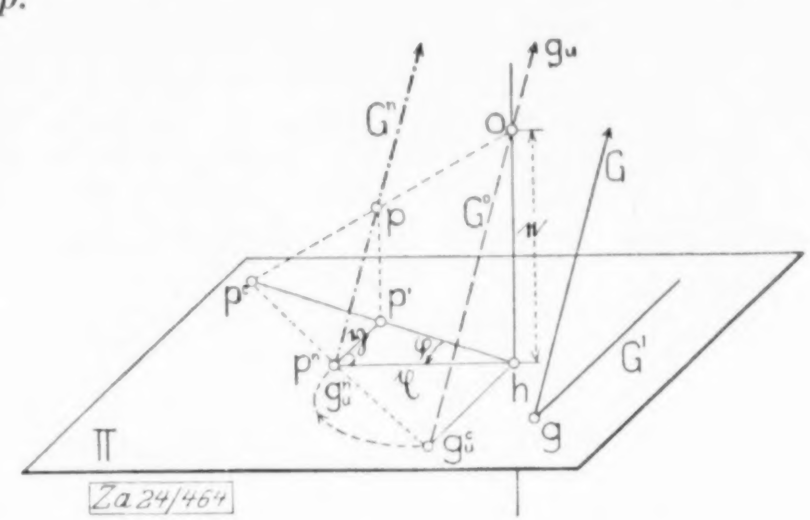


Abb. 1

Durch die Betrachtung des Zusammenhanges zwischen dem Netzriß p^n, dem Zentralriß p^c und dem Normalriß p' von p gelangt man leicht zu einer tieferen Einsicht in den Charakter des Drehnetzes. Bedeuten, Abb. 1, $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{z}$ die Bilddistanzen von o und p, ferner $\mathfrak{x} = \overline{hp^n}$ $= \overline{hg_u^c}$ und $\mathfrak{y} = \overline{p^n p'}$, so gilt die Proportion

$$\mathfrak{z} : \mathfrak{e} = \mathfrak{y} : \mathfrak{x} \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Für jenen imaginären Punkt g_i von G^n, dessen Bilddistanz $\mathfrak{z} = \mathfrak{e}i$ $(i = \sqrt{-1})$ beträgt, folgt aus (1) $\mathfrak{y} = \mathfrak{x}i$. Legen wir in die Bildebene Π ein rechtwinkliges Achsenkreuz (XY), dessen Ursprung mit h und dessen X-Achse mit $[hg_u^n]$ zusammenfällt, so können wir somit sagen, daß der Normalriß von g_i auf der Geraden J_1 mit der Gleichung $\mathfrak{y} = \mathfrak{x}i$ liegt. Uebt man auf das Achsenkreuz in Π eine Drehung um o aus,

$$\mathfrak{x} \to \mathfrak{x}\cos\alpha - \mathfrak{y}\sin\alpha, \qquad \mathfrak{y} \to \mathfrak{x}\sin\alpha + \mathfrak{y}\cos\alpha,$$

so geht die Gleichung $\mathfrak{y} = \mathfrak{x}i$, sowie auch die Gleichung $\mathfrak{y} = -\mathfrak{x}i$ in sich über. Die beiden konjugiert imaginären Geraden J_1 und J_2 durch h mit diesen Gleichungen heißen die Minimalstrahlen des Punktes h. Sie haben nach dem Gesagten in bezug auf jedes rechtwinklige Achsenkreuz durch h dieselbe Gleichung $\mathfrak{y} = \pm\mathfrak{x}i$. Aus dem Gesagten folgt nun, daß jeder Netzstrahl die zu Π parallele imaginäre Ebene ι_1 mit der Gleichung $\mathfrak{z} = \mathfrak{e}i$ in einem Punkt schneidet, dessen Normalriß auf der Minimalgeraden J_1 $(\mathfrak{y} = \mathfrak{x}i)$ liegt. Somit liegen die Schnittpunkte aller Netzstrahlen mit ι_1 auf der imaginären Geraden F_1 von ι_1, deren Normalriß J_1 ist und entsprechend die Schnittpunkte mit der Ebene ι_2 $(\mathfrak{z} = -\mathfrak{e}i)$ auf der zu F_1 konjugiert imaginären Geraden von ι_2, deren Normalriß J_2 ist. Das Drehnetz besteht mithin aus allen reellen Strahlen G^n, die das Brennstrahlenpaar $(F_1 F_2)$ schneiden. Da bei einer Drehung um den Hauptsehstrahl $[oh]$ ι_1, ι_2, J_1 und J_2, also auch $(F_1 F_2)$, festbleiben, geht das Netz bei allen Drehungen um $[oh]$ in sich über.

Die Netzstrahlen sind einerseits die Verbindungslinien konjugiert imaginärer Punkte von F_1 und F_2, anderseits die Schnittlinien konjugiert imaginärer Ebenen durch F_1 und F_2. Daraus folgt, daß durch jeden reellen Punkt ein einziger Netzstrahl geht und in jeder reellen Ebene ein einziger Netzstrahl liegt. Jeder reelle Punkt p, der nicht auf der uneigentlichen[1]) Geraden U von Π liegt, hat daher einen eindeutigen Netzriß p^n; aber auch jeder nicht durch U gehenden Ebene α läßt sich ein Punkt in Π zuordnen, nämlich der Spurpunkt a des in α liegenden Netzstrahls, worauf wir später noch zurückkommen. a heiße der Netzpunkt von α.

Aus Abb. 1 entnimmt man leicht den Zusammenhang zwischen dem Grundriß p' und dem Netzriß p^n eines Raumpunktes p $(\mathfrak{z})$. h, p', p^n bilden ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei p^n. Für den spitzen Winkel φ bei h folgt aus der Abbildung und aus Gleichung (1)

$$\cos\varphi = \frac{\mathfrak{x}}{+\sqrt{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2}} = \frac{\mathfrak{e}}{+\sqrt{\mathfrak{e}^2 + \mathfrak{z}^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

$$\sin\varphi = \frac{\mathfrak{z}}{+\sqrt{\mathfrak{e}^2 + \mathfrak{z}^2}} \ldots \left(-\frac{\pi}{2} < \varphi < +\frac{\pi}{2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

E. Müller (s. Fußnote 4, S. 146) nennt diesen durch die Höhenkote $\mathfrak{z}$ eindeutig bestimmten Winkel φ die Winkelkote des Raumpunktes. In dem Gesagten liegt der

Satz 1: Das Netzrißfeld (p^n) geht aus dem Normalrißfeld (p') durch die Drehstreckung[2]) $(h, \varphi, \cos\varphi)$ hervor.

[1]) uneigentlich = unendlichfern.

[2]) Die Drehstreckung $(h, \varphi, \cos\varphi)$ ist die Zusammensetzung der Drehung um h durch den Winkel φ und der zentrischen Aehnlichkeit mit dem Zentrum h und dem Aenderungsverhältnis $\cos\varphi$.

Auf Grund dieses Satzes und der Formel (3) gilt der durch Abb. 2 dargestellte Zusammenhang zwischen den beiden kotierten Projektionen $p'(\mathfrak{z})$ und $p^n(\varphi)$. Hierzu sei bemerkt, daß der den Distanzzykel $E = (h, \mathfrak{e})$ berührende Stab von der Länge $\mathfrak{z}$ im positiven Sinn um h drehen soll, wenn $\mathfrak{z}$ positiv ist.

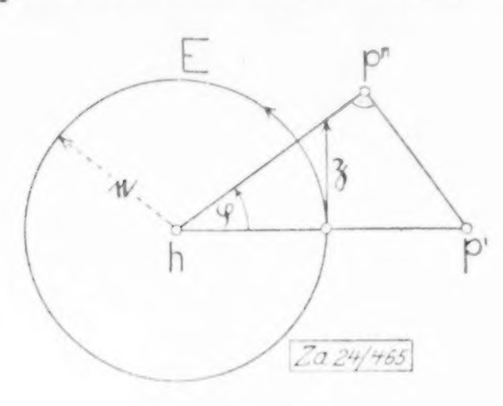


Abb. 2

Eine Raumgerade G, die nicht zu Π parallel ist, läßt sich umkehrbar eindeutig durch ihren Spurpunkt g in Π und ihren Fluchtpunkt g_u^c, das Bild ihres uneigentlichen Punktes g_u, darstellen. Der Netzriß von g_u ist, Abb. 1, der aus g_u^c durch eine negative Vierteldrehung um h hervorgehende Netzfluchtpunkt g_u^n. Die nicht zu Π parallelen Geraden lassen sich also sowohl auf die geordneten Punktpaare $(g g_u^c)$ als auch auf die Paare $(g g_u^n)$ umkehrbar eindeutig abbilden. Fassen wir einen Raumpunkt als Träger eines Strahlbündels $p(G)$ auf, so bilden, wie man leicht einsieht, die Bildpaare $(g g_u^c)$ der durch ihn gehenden Strahlen G eine zentrische Aehnlichkeit mit dem Zentrum p^c [1]), Abb. 3. Uebt man auf das Feld der Fluchtpunkte g_u^c die negative Vierteldrehung um h aus, so gehören daher die Bildpaare $(g g_u^n)$ der Bündelstrahlen einer gleichsinnigen Aehnlichkeit an, in der entsprechende Geraden aufeinander normal stehen. Der im Endlichen liegende Doppelpunkt dieser Aehnlichkeit ist der Netzriß p^n von p, weil bloß die Netzstrahlen zusammenfallende Bildpaare $(g = g_u^n)$ besitzen.

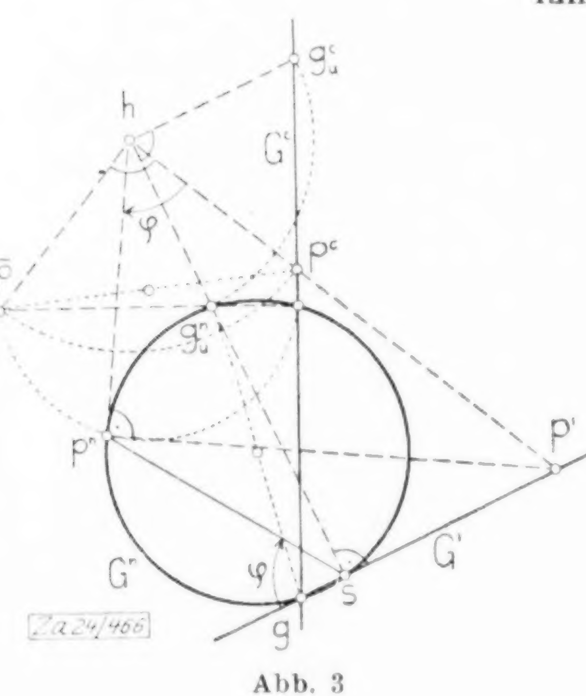


Abb. 3

Wir können jetzt leicht den Netzriß eines Raumpunktes p finden, der durch sein Zentralbild p^c und das Bildpaar $(g g_u^c)$ einer durch ihn gehenden Geraden gegeben ist. Dreht man g_u^c und p^c um h durch -90^0 nach g_u^n und $\bar{p}$, so bilden $(g g_u^n)$ und $(p^c \bar{p})$ zwei Paare der gleichsinnigen Aehnlichkeit $(g \to g_u^n)$. Da in dieser Aehnlichkeit je zwei entsprechende Geraden auf einander normal stehen, so müssen unsere beiden Punktepaare $(g g_u^n)$ und $(p^c \bar{p})$ aus dem Doppelpunkt p^n durch rechte Winkel projiziert werden. p^n ist somit der von $[g p^c \cdot g_u^n \bar{p}]$ verschiedene Schnittpunkt der Kreise über den Durchmessern $g g_u^n$ und $p^c \bar{p}$. — Durchläuft p die Gerade G, so bewegt sich p^n auf dem Kreis G^n mit dem Durchmesser $g g_u^n$. Es gilt also der

Satz 2: Der Netzriß einer Geraden G ist der Kreis G^n über ihrem Bildpaar $(g g_u^n)$.

Auch der Normalriß G' von G läßt sich sofort zeichnen; er geht durch g und ist zu $[h g_u^c]$ parallel, zu $[h g_u^n]$ normal. Man erhält nun gemäß Abb. 2 den Normalriß p' von p, indem man durch p^n das Lot auf $[p^n h]$ fällt und mit G' schneidet. Da G' zu $[h g_u^n]$ normal und $g g_u^n$ ein Durchmesser von G^n ist, liegt der Schnittpunkt $s = [G' \cdot h g_u^n]$ auf G^n. Da die Strecke hp' aus s und aus p^n durch rechte Winkel projiziert wird, gilt die Winkelgleichheit $\widehat{g\, s\, p^n} = \widehat{p'\, h\, p^n}$.

Dieser Winkelwert ist aber, Abb. 2, die Winkelkote von p. Diese Ueberlegung gibt den

Satz 3: Der auf dem Netzriß einer Geraden $G(g g_u^n)$ zum Bogen $\widehat{g p^n}$ gehörige Peripheriewinkel ist gleich der Winkelkote jenes Punktes von G, dessen Netzriß p^n ist.

Betrachten wir noch die Abbildung einer Ebene α, Abb. 4. Die Spurpunkte der in ihr liegenden Strahlen liegen auf der Bildspur A, die Fluchtpunkte auf der zu A

Abb. 4

[1]) E. Müller, Vorlesungen über darstellende Geometrie, 1. Bd. Die linearen Abbildungen, bearbeitet von E. Kruppa, Leipzig und Wien 1923, Nr. 4.

parallelen (oder mit A zusammenfallenden) Fluchtspur A_u^c. Mithin liegen die Netzfluchtpunkte der in α liegenden Geraden auf einer zu E normalen Geraden A_u^n, der Netzfluchtspur von α. Der Schnittpunkt $[AA_u^n] = a = a_u^n$ ist das zusammenfallende Bildpaar des in a liegenden Netzstrahls $\mathfrak{A}$. Wir nannten (S. 147) $a = a_u^n$ den Netzpunkt von α. Da alle Geraden von α den Netzstrahl $\mathfrak{A}$ schneiden, bilden sie sich netzprojektiv als die Kreise durch a ab; zu diesen müssen wir auch die Geraden S^n durch a rechnen, die den Spurparallelen S von α entsprechen, deren Netzbilder in Gerade ausarten, weil ihre Netzfluchtpunkte unendlichfern liegen. Alle Punkte p einer Spurparallelen müssen die gleiche Winkelkote $\widehat{p'hp^n}$ haben. Rückt p auf der Spurparallelen S ins Unendliche, so bewegt sich p' in der Richtung von A und p^n auf S^n ins Unendliche; somit ist $\widehat{AS^n} = \varphi$ die Winkelkote der Spurparallelen S. — Schließlich sei noch darauf aufmerksam gemacht, daß jede nicht zu Π parallele Ebene durch ihre Bildspur A und ihren (auf A liegenden) Netzpunkt a umkehrbar eindeutig abgebildet wird; wird (Aa) gewählt, so geht die zugehörige Ebene durch A und den durch a gehenden Netzstrahl $\mathfrak{A}$.

2. Abbildung der unendlichfernen Elemente. Sowohl in der Zentralprojektion als in der Netzprojektion werden die uneigentlichen Punkte durch Punkte (Fluchtpunkt, Netzfluchtpunkt), die uneigentlichen Geraden durch Gerade (Fluchtspur, Netzfluchtspur) abgebildet. Ausgehend von einer Abbildung, durch die W. Blaschke[1]) die Punkte eines Drehzylinders auf die Speere (Speer = Gerade mit Richtungssinn) der Bildebene abbildet, wollen wir jetzt die uneigentlichen Punkte auf die Geraden und die uneigentlichen Geraden auf die Punkte der Bildebene abbilden. Gegeben sei ein zur Bildebene Π normaler Drehzylinder, der Π in einem Kreise $E = (h, \mathfrak{r})$ schneide, Abb. 5. Außerdem zeichnen wir einen bestimmten Schraubsinn aus (den Rechtsschraubsinn), durch den jedem Speer ein »positiver« Umkreisungssinn zugeordnet wird. E und die Zylinderachse H seien diesem Schraubsinn gemäß orientiert.

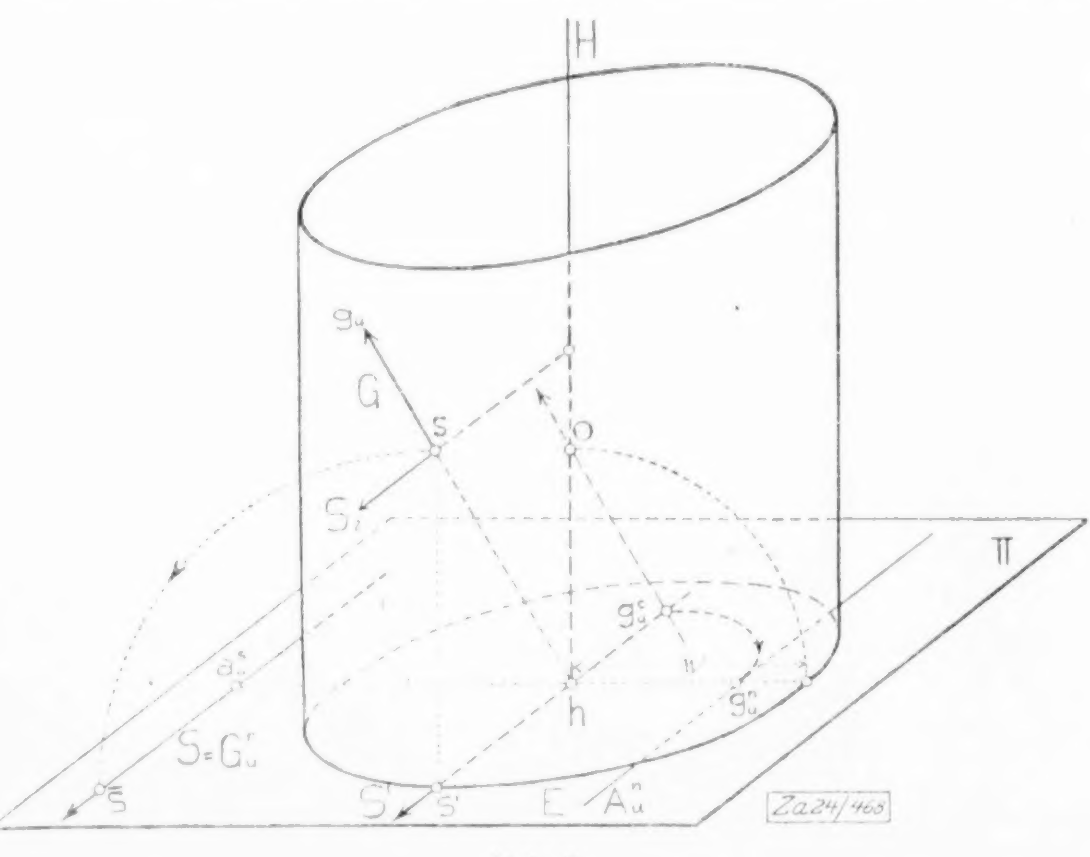


Abb. 5

W. Blaschke bildet nun die Zylinderpunkte s durch folgende Konstruktion auf die Speere S in Π ab. Man fällt durch s das Lot auf die Zylinderachse H und orientiert dieses in der Richtung von H gegen s; der dadurch erhaltene Speer S_2 wird senkrecht auf Π nach S' projiziert und um S' im positiven Sinn durch 90° nach S gedreht. Man sieht ohne weiters, daß diese Abbildung umkehrbar eindeutig ist. Je zwei Zylinderpunkten, die auf einem Strahl G durch h liegen, entsprechen entgegengesetzt gerichtete Speere auf demselben Träger. Wir verfolgen diese Abbildung nicht weiter im Sinn der angeführten Arbeit von W. Blaschke, sondern lenken unsere Aufmerksamkeit auf den Umstand, daß man nach dem zuletzt Gesagten dem unendlichfernen Punkte g_u von G den gemeinsamen Träger der den beiden Zylinderpunkten von G entsprechenden Speere als Bild G_u^c zuordnen kann. Ordnet man noch dem uneigentlichen Punkt der Zylinderachse die uneigentliche Gerade von Π als Bild zu, so hat man eine umkehrbare eindeutige Abbildung $g_u \to G_u^c$

[1]) Ueber die Laguerresche Geometrie orientierter Geraden in der Ebene. Arch. Math. Phys. 18 (1911) S. 132 bis 140.

zwischen den uneigentlichen Punkten des Raumes und den Geraden der Bildebene. Wir nennen G_u^r das Richtungsbild aller Geraden von der entsprechenden Richtung g_u.

Außer dieser Abbildung der uneigentlichen Elemente führen wir noch eine Zentralprojektion und die gemäß Abb. 1 mit dieser verbundene Netzgrojektion ein, indem wir als Sehpunkt jenen Punkt o der Zylinderachse wählen, dessen Bilddistanz gleich dem Halbmesser $\mathfrak{c}$ des Kreises E ist. Für o als Zentrum hat g_u den Zentralriß g_u^c, aus dem durch die negative Vierteldrehung um h der Netzriß g_u^n entsteht. Aus der Aehnlichkeit der beiden Dreiecke $(s\,s'\,h)$ und $(o\,h\,g_u^c)$ folgt $\overline{s\,s'} \cdot \overline{h\,g_u^c} = \mathfrak{c}^2$. Nun ist $\overline{s\,s'}$ gleich dem Abstand $h\,G_u^r$ und $\overline{h\,g_u^c} = \overline{h\,g_u^n}$; da ferner h und g_u^n auf derselben Seite von G_u^r liegen, gilt der

Satz 4: Das Richtungsbild G_u^r einer Geraden G ist die Antipolare ihres Netzfluchtpunktes g_u^n bezüglich des Distanzkreises E.

Bewegt sich, Abb. 5, g_u^n auf einer zu G_u^r parallelen Geraden A_u^n, so dreht sich G_u^r um den Antipol $a_u^s = [G_u^r\,h \mid G_u^r]$ von $A_u^n \cdot A_u^n$ ist der Netzriß einer unendlichfernen Geraden A_u, also die Netzfluchtlinie aller Ebenen durch A_u. Ebenso wie durch A_u^n ist A_u aber auch durch den Punkt a_u^s bestimmt. Wir nennen a_u^s deshalb das Stellungsbild der Ebenen des Parallelbüschels (A_u) und erhalten dann folgenden, den Satz 4 ergänzenden

Satz 4a: Das Stellungsbild einer Ebene ist der Antipol ihrer Netzfluchtlinie bezüglich des Distanzkreises E.

Die folgenden Sätze sind den zeichnerischen Kennzeichen für das Normalstehen von Geraden und Ebenen gewidmet. Ein Sehstrahl und eine zu ihm normale Sehebene schneiden Π in einem Punkt n_u^c und einer Geraden N_u^c, die im Antipolarsystem des Distanzkreises E einander entsprechen. Wir können auch sagen:

Satz 5: Eine Gerade N ist zu einer Ebene ν normal, wenn der Fluchtpunkt n_u^c von N der Antipol der Fluchtspur N_u^c von ν bezüglich des Distanzkreises E ist.

Darin liegt auch der

Satz 6: Zwei Gerade (Ebenen) stehen aufeinander normal, wenn ihre Fluchtpunkte (Fluchtspuren) bezüglich E antikonjugiert sind.

Da die Netzfluchtelemente aus den perspektiven Fluchtelementen durch eine negative Vierteldrehung entstehen, gelten auch die beiden folgenden Sätze:

Satz 7: Eine Gerade N ist zu einer Ebene ν normal, wenn der Netzfluchtpunkt n_u^n von N der Antipol der Netzfluchtspur N_u^n von ν bezüglich E ist.

Satz 8: Zwei Gerade (Ebenen) stehen aufeinander normal, wenn ihre Netzfluchtpunkte (Netzfluchtspuren) bezüglich E antikonjugiert sind.

Aus den Sätzen 4, 4a, 7 und 8 ergibt sich:

Satz 9: Eine Gerade ist zu einer Ebene normal, wenn das Richtungsbild der Geraden die Antipolare des Stellungsbildes der Ebene bezüglich D ist.

Satz 10: Zwei Gerade (Ebenen) stehen aufeinander normal, wenn ihre Richtungsbilder (Stellungsbilder) bezüglich E antikonjugiert sind.

Satz 11: Eine Gerade ist zu einer Ebene normal, wenn das Richtungsbild der Geraden mit der Netzfluchtspur der Ebene bezw. der Netzfluchtpunkt der Geraden mit dem Stellungsbild der Ebene zusammenfällt.

Satz 12: Zwei Gerade (Ebenen) stehen aufeinander normal, wenn der Netzfluchtpunkt (die Netzfluchtspur) der einen mit dem Richtungsbild (dem Stellungsbild) der anderen inzident ist.

3. Die Abbildung der räumlichen Kräftesysteme. Nach diesen rein geometrischen Vorbereitungen wenden wir uns der Mises'schen Abbildung räumlicher Kräftesysteme zu. Zunächst werden nach v. Mises die Raumvektoren $\mathfrak{k}$ durch folgende Regel auf die Stäbe[1]) $\bar{\mathfrak{k}}$ der Bildebene abgebildet, Abb. 6. Der zu einem nicht auf Π normalen Vektor $\mathfrak{k}$ gehörige Stab $\bar{\mathfrak{k}}$ habe die Länge und Richtung des Normalrisses $\mathfrak{k}'$ und bestimme bezüglich eines festen Drehpoles h ein Moment,

[1]) Ein Stab ist eine gerichtete Strecke $a\,b$, die mit allen zu ihr gleichen und gleichgerichteten Strecken ihres Trägers $[a\,b]$ äquivalent ist; ein Stab ist somit auch die Zusammenfassung einer Geraden (Träger) mit einem zu ihr parallelen Vektor.

dessen darstellender Vektor die zur Bildebene normale Komponente $\mathfrak{k}_z$ ist. — Ist $\mathfrak{k}$ zu Π normal, so entspricht ihm in Π das Stäbepaar, dessen darstellender Vektor $\mathfrak{k}$ ist[1]).

Zur zeichnerischen Durchführung der Abbildung wählen wir in der Bildebene Π den Pol (Hauptpunkt) h, ferner für die Darstellung der Drehmomente durch Vektoren eine Einheitsstrecke $\mathfrak{e}$ und einen bestimmten Schraubsinn (Rechtsschraubsinn), durch den wieder jedem Speer ein »positiver« Umkreisungssinn zugeordnet wird. Der dem Vektor $\mathfrak{k}$ zugeordnete Stab $\overline{\mathfrak{k}}$ ergibt sich, Abb. 6, nun nach v. Mises durch folgende Konstruktion. Man macht h zum Anfangspunkt von $\mathfrak{k}$, trägt auf dem Normalriß $\mathfrak{k}'$ im Vektorsinn die Einheitsstrecke $\mathfrak{e}$ von h bis s' ab, projiziert s' senkrecht zu Π auf den Vektor $\mathfrak{k}$ nach s, dreht s im positiven Sinn um $\mathfrak{k}'$ in die Bildebene nach $\overline{s}$ und legt schließlich durch $\overline{s}$ den zu $\mathfrak{k}'$ gleichen und gleichgerichteten Stab $\overline{\mathfrak{k}}$. Bezeichnet nämlich $\mathfrak{a}$ den Abstand des Stabes $\overline{\mathfrak{k}}$ von h, so gilt nach dieser Konstruktion die Proportion $|\mathfrak{k}_z| : \mathfrak{a} = |\overline{\mathfrak{k}}| : \mathfrak{e}$, die besagt, daß $\mathfrak{k}_z$ der das Drehmoment $(h, \overline{\mathfrak{k}})$ darstellende Vektor für $\mathfrak{e}$ als Einheitsstrecke ist.

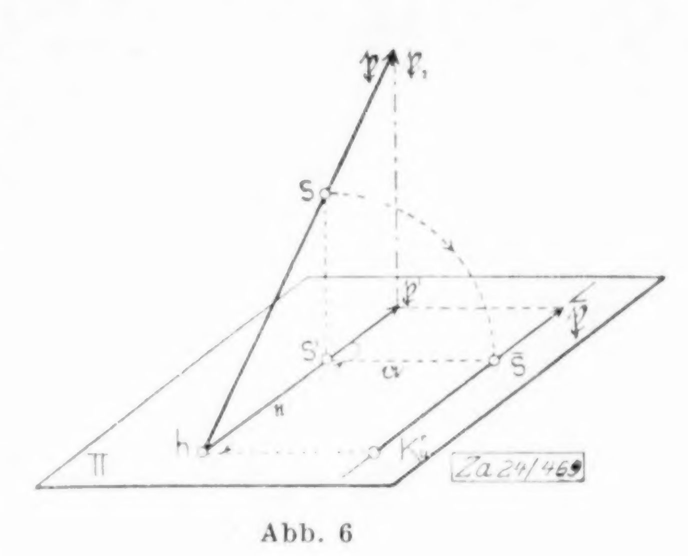


Abb. 6

Richten wir unsere Aufmerksamkeit auf den Träger des Stabes $\overline{\mathfrak{k}}$, so erkennen wir in ihm durch Vergleich mit Abb. 5 das Richtungsbild K_u^r des Vektors $\mathfrak{k}$ für die durch $(h, \mathfrak{e})$ bestimmte Netzprojektion. Damit ist der Zusammenhang zwischen der Mises'schen Abbildung der Raumvektoren und der Netzprojektion hergestellt. Tatsächlich sieht man sich in der Anwendung der Abbildung oft genötigt, das Antipolarsystem des Kreises $E = (h, \mathfrak{e})$ anzuwenden. Die netzprojektive Deutung dieses Vorganges erscheint mir geeignet, diese Konstruktionen durchsichtiger zu gestalten. Der durch seinen Träger (Richtungsbild) K_u^r und den Normalrißvektor $\mathfrak{k}'$ bestimmte Bildstab $\overline{\mathfrak{k}} = (K_u^r, \mathfrak{k}')$ ist äquivalent der aus dem Netzfluchtpunkt k_u^n und $\mathfrak{k}'$ bestehenden Figur $(k_u^n, \mathfrak{k}')$, in der $[h\, k_u^n]$ normal zu $\mathfrak{k}'$ ist. Bei der Anwendung der Bildfigur $(k_u^n, \mathfrak{k}')$ ist zu beachten, daß die Komponente $\mathfrak{k}_z$ positiv ist, wenn $\mathfrak{k}'$ im positiven Sinn um k_u^n dreht. Gemäß der Definition der Abbildung ist

$$|\mathfrak{k}_z| = |\mathfrak{k}'|\,\overline{K_u^r h} = \frac{|\mathfrak{k}'|}{\overline{h\, k_u^n}} \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

wenn für die Längenmessung der Halbmesser $\mathfrak{e}$ von E als Einheit genommen wird.

Bei praktischen Anwendungen der Abbildung werden die Vektoren $\mathfrak{k}$ meistens durch Grund- und Aufriß $(\mathfrak{k}'\,\mathfrak{k}'')$ gegeben sein. Abb. 7 zeigt die Ermittlung des Bildvektors $\overline{\mathfrak{k}}$ auf zwei verschiedene Arten.

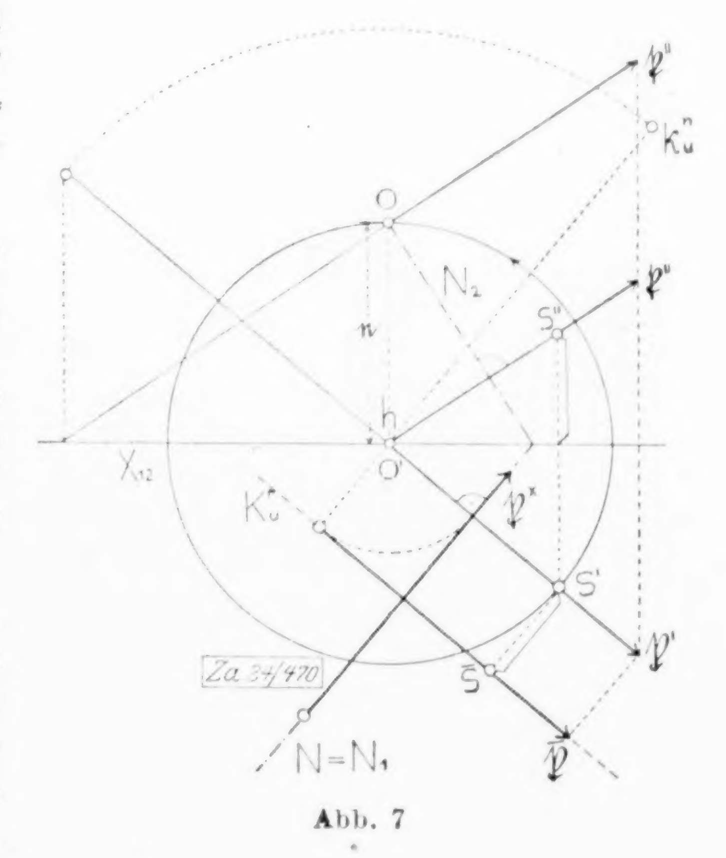


Abb. 7

1. Verfahren: Man geht genau nach der oben angeführten Regel vor. Hiernach hat man $\mathfrak{k}$ an den Anfangspunkt h zu legen und jenen Punkt s von $\mathfrak{k}$, für den $\overline{h s'}$ gleich $\mathfrak{e}$ ist, mit der erstprojizierenden Ebene durch $\mathfrak{k}$ im positiven Sinn um $\mathfrak{k}'$ in die Zeichenebene nach $\overline{s}$ zu klappen. $\overline{s}$ ist ein Punkt des Trägers K_u^r des Bildstabes $\overline{\mathfrak{k}}$.

2. Verfahren: Nach Satz 11 fällt das Richtungsbild einer Geraden mit der Netzfluchtspur der zu ihr normalen Ebenen zusammen. $\mathfrak{k}$ liegt also auf der Netzfluchtspur der zu $\mathfrak{k}$ normalen Ebenen[2]). Wir legen die Aufrißebene durch den Augpunkt o,

[1]) Dieser Sonderfall ($\mathfrak{k} \mid \Pi \rightarrow$ Stäbepaar) entspricht dem zugehörigen Grenzübergang.

[2]) Th. Schmid hat nach einer mündlichen Mitteilung diesen Satz bei der Diskussion zu einem Vortrag ausgesprochen, den R. v. Mises in der Wiener mathem. Gesellschaft über seine Abbildung hielt.

dessen Abstand von der Grundrißebene, die wir zugleich als Bildebene für unsere Abbildung der Vektoren wählen, $\mathfrak{e}$ sei. Nach dem Gesagten ist der Träger K_u von $\overline{\mathfrak{k}}$ die durch -90^0 um $o' = h$ gedrehte erste Spur $N = N_1$ der Normalebene ν zu $\mathfrak{k}$ durch o. Es ist $N_2 = [o'' | \mathfrak{k}'']$ und $N = N_1 = [N_2 \, X_{12} | \mathfrak{k}']$. Dieses Verfahren ist bei Kräften mit verschiedenen Angriffspunkten zu empfehlen. Es legt uns aber auch eine zeichnerisch wertvolle Modifikation der Mises'schen Abbildung nahe:

Dreht man nämlich irgend eine mit einem System von Misesschen Bildstäben $\overline{\mathfrak{k}}$ ausgeführte graphostatische Konstruktionsfigur durch $+90^0$ um $o' = h$, so gelangen die Bildstäbe in die ersten Spuren N_1 der Normalebenen ν. Da das Zeichnen von N_1 bloß das vorherige Markieren des Punktes $[N_2 \, X_{12}]$ voraussetzt — N_2 braucht nicht gezogen zu werden — kann die Abbildung der Raumvektoren auf die Stäbe der Bildebene durchgeführt werden, ohne sie mit Konstruktionslinien zu belasten, wenn man die Mises'sche Abbildung folgendermaßen abändert: Der einem Vektor $\mathfrak{k}$ entsprechende Bildstab $\mathfrak{k}^* = (N, \mathfrak{k}'^0)$ hat als Träger die Bildspur N der durch einen Festpunkt o gehenden Normalebene von $\mathfrak{k}$ und als Vektor $\mathfrak{k}^*$ den aus dem Grundriß $\mathfrak{k}'$ von $\mathfrak{k}$ durch eine positive Vierteldrehung hervorgehenden Vektor.

Machen wir die Bildebene zur $[X\,Y]$-Ebene eines räumlichen Koordinatensystems vom vorgegebenen Schraubsinn mit dem Anfangspunkt o', und bedeuten $\mathfrak{k}_x$, $\mathfrak{k}_y$, $\mathfrak{k}_z$ die Komponenten von $\mathfrak{k}$, ferner $\overline{\mathfrak{k}}_x$, $\overline{\mathfrak{k}}_y$ die Komponenten des Mises'schen Bildstabes $\overline{\mathfrak{k}}$, $\mathfrak{M}$ das Drehmoment von $\overline{\mathfrak{k}}$ bezüglich o', so lauten die Abbildungsgleichungen der Mises'schen Abbildung

$$\mathfrak{k}_x = \overline{\mathfrak{k}}_x, \quad \mathfrak{k}_y = \overline{\mathfrak{k}}_y, \quad \mathfrak{e}\,\mathfrak{k}_z = \mathfrak{M} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Die Abbildungsgleichungen der modifizierten Abbildung sind indeß, wenn $\mathfrak{k}_x^*$, $\mathfrak{k}_y^*$ die Komponenten des Bildstabes $\mathfrak{k}^*$ und $\mathfrak{M}$ dessen Drehmoment bezüglich o' bedeuten,

$$\mathfrak{k}_x = \mathfrak{k}_y^*, \quad \mathfrak{k}_y = -\mathfrak{k}_x^*, \quad \mathfrak{e}\,\mathfrak{k}_z = \mathfrak{M} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Sowohl aus (5) als auch aus (6) erkennt man unmittelbar den Fundamentalsatz der Abbildung, daß dem Summenvektor mehrerer Vektoren $\mathfrak{k}$ der Summenstab der zugehörigen Bildstäbe $\overline{\mathfrak{k}}_i$ bzw. $\mathfrak{k}_i^*$ entspricht.

Zur Abb. 7 zurückkehrend bemerken wir noch, daß sich ebensoleicht wie das Richtungsbild K_u auch der Netzfluchtpunkt $g_u{}''$ von $\mathfrak{k}$ finden läßt, als der durch -90^0 um $o' = h$ gedrehte erste Spurpunkt der Geraden $[o \,||\, \mathfrak{k}]$.

4. Die Darstellung des Nullsystems. Aus den Anwendungen der Mises'schen Abbildung ist vom Standpunkt der darstellenden Geometrie die zeichnerische Behandlung des mit einem Kräftesystem verbundenen Nullsystem von besonderem Interesse. Wir sahen, daß die Mises'sche Abbildung mit der Netzprojektion eng zusammenhängt. Bei der Behandlung des Nullsystems müssen wir daher eine bemerkenswerte Arbeit von L. Eckhart[1]) heranziehen, in der der lineare Strahlkomplex netzprojektiv abgebildet wird. Wir lösen zunächst in der Mises'schen Abbildung die beiden folgenden Aufgaben, an die wir dann die Hauptgedanken der Eckhartschen Abhandlung ungezwungen anknüpfen können.

1. Aufgabe: Man ermittle den Nullpunkt v der Bildebene (Abb. 8). Das Nullsystem sei mit einem Kräftesystem verbunden, daß durch eine Einzelkraft $\mathfrak{k}$ mit dem Angriffspunkt h und einen Momentvektor $\mathfrak{m}$ gegeben sei. In der Bildebene sei $\mathfrak{k}$ durch seinen Grundriß $\mathfrak{k}'$ und seinen Netzfluchtpunkt $k_u{}''$ gegeben. [Statt des Bildstabes $\overline{\mathfrak{k}}$ kann $(\mathfrak{k}', k_u{}'')$ gesetzt werden; $h\,k_u{}''$ normal zu $\mathfrak{k}'$; S. 151.] Von $\mathfrak{m}$ braucht bloß der Grundriß $\mathfrak{m}'$ gegeben zu sein, den wir auch von h ausgehen lassen. Wir ermitteln den Nullpunkt der Zeichenebene als Schnittpunkt zweier Nullachsen. Die eine ist unmittelbar gegeben als die Normale N_1 zu $\mathfrak{m}'$ durch h, die andere, noch unbekannte, sei die zu N_1 normale Nullachse N_2, deren Abstand von h, gemessen mit der Längeneinheit $\mathfrak{e}$ unsrer Abbildung, mit $\mathfrak{r}$ bezeichnet sei. Für das Verschwinden des Drehmomentes des Kräftesystems bezüglich N_2 muß die Gleichung gelten $|\mathfrak{k}_z|\,\mathfrak{r} = |\mathfrak{m}'|$, woraus nach Gl. (4) die Proportion $|\mathfrak{k}'| : |\mathfrak{m}'| = h\,k_u{}'' : \mathfrak{r}$ folgt. Bezeichnen wir die Endpunkte von $\mathfrak{k}'$ und $\mathfrak{m}'$ mit k' und m', den gesuchten Nullpunkt $[N_1 \, N_2]$ mit v, so besagt diese Proportion, daß die Dreiecke $(h\,k'\,m')$ und $(h\,k_u{}''\,v)$ ähnlich sind. v ist daher der Schnittpunkt von N_1 mit dem Lot,

[1]) Eine Abbildung der linearen Strahlkomplexe auf die Ebene, Stzgsb. Ak. Wien (mat.-nat.) IIa, 127 (1918), S. 91—118.

das sich aus k_u^n auf die Verbindungslinie $[k' m']$ legen läßt. In der Tat dreht, von der Pfeilspitze von $\mathfrak{m}'$ aus betrachtet, das zu $\mathfrak{m}'$ gehörige Kräftepaar (nach Definition) linksum, $\mathfrak{k}_z$ (s. S. 151) aber mit absolut gleichem Drehmoment rechtsum um die Achse N_2.

2. Aufgabe: Man ermittle die Nullebene α eines Punktes a der Bildebene (Abb. 8). Das nach h reduzierte Kräftesystem $(\mathfrak{k}, \mathfrak{m})$ sei durch $(\mathfrak{k}' k_u^n)$ und $(\mathfrak{m}' M_u^r)$ gegeben. Ist v der Nullpunkt der Bildebene, den wir vorhin ermittelt haben, so ist $[va]$ die Bildspur A der gesuchten Nullebene α. Reduziert man das Kräftesystem nach dem Pol a, so tritt zum Momentvektor $\mathfrak{m}$ ein neuer $\mathfrak{m}_a$ hinzu, der auf der Ebene normal steht, die durch a und die Kraft $\mathfrak{k}$ geht. Der Grundriß $\mathfrak{m}_a'$ ist daher zu $[h\,a] = H$ normal, und das Richtungsbild M_{au}^r von $\mathfrak{m}_a$ geht nach Satz 12 durch den Netzfluchtpunkt k_u von k. Es ist also $M_{au}^r = [k_u \,|\, H]$. Der resultierende Momentvektor $(\mathfrak{m} + \mathfrak{m}_a)$ wird daher durch einen Stab dargestellt, der durch den Schnittpunkt $[M_u^r\, M_{au}^r]$ geht und auf der Bildspur A senkrecht steht. Sein Träger $A_u^n = [m \,|\, A]$ ist das Richtungsbild des Momentvektors für eine Reduktion des Kräftesystems nach dem Pol a, somit nach Satz 11 die Netzfluchtlinie der gesuchten Nullebene α, die hiernach durch ihr Bildpaar $(A\, A_u^n)$ bestimmt ist. Der Schnittpunkt $[A\, A_u^n]$ ist der Netzpunkt a' (s. S. 147) der Ebene α und als solcher das zusammenfallende Bildpaar des in α liegenden Netzstrahles $\mathfrak{A}'$.

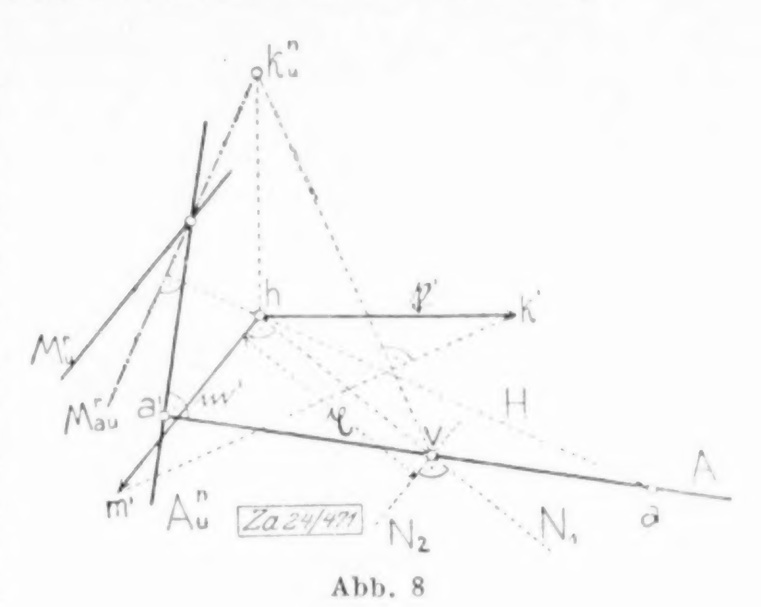


Abb. 8

Die Betrachtung der Punktepaare $(a\, a')$ führt uns in das Gebiet der genannten Arbeit von L. Eckhart. Jedem Punkt a von Π ist ein Punkt a', der Netzpunkt der zu a gehörigen Nullebene zugeordnet. Wir haben also in Π eine Verwandschaft $\mathfrak{P}$, die jedem Punkt a von Π seine Nullebene in der einfachsten Weise zuweist; ist nämlich a' der a entsprechende Punkt, so ist $[a\, a'] = A$ die Bildspur und $[a' \,|\, A] = A_u^n$ die Netzfluchtspur der Nullebene von a.

Aus der Abb. 8 ersieht man, daß je zwei entsprechende Punkte a, a' auf einer Geraden A durch den Nullpunkt v von Π gehen; ferner, daß auf einer solchen Geraden A die Punktepaare $(a\, a')$ projektive Reihen bilden. Auf jeder Geraden A durch v gibt es daher zwei (reelle, konjugiert imaginäre oder zusammenfallende) Punkte a, die mit ihren entsprechenden zusammenfallen. So ein Doppelpunkt $a = a'$ ist das zusammenfallende, netzprojektive Bildpaar einer Nullachse des Kräftesystems, die zugleich Netzstrahl ist. Nun bilden die Nullachsen eines räumlichen Kräftesystems bekanntlich einen linearen Strahlkomplex oder, wie man kürzer sagt, ein Strahlgewinde. Ein Strahlgewinde und ein Strahlnetz haben, wenn das Netz nicht ganz dem Gewinde angehört, eine Regelschar 2. O. gemeinsam[1]), zu deren Leitschar die Brennstrahlen $F_1\, F_2$ des Netzes gehören. Daraus folgt, daß die in unserm projizierenden Strahlnetz vorhandenen Nullachsen eine Regelschar 2. O. bilden, die Π in einem Kreis K schneidet, weil F_1 und F_2 durch die absoluten Punkte von Π gehen[2]); vorausgesetzt muß hierzu werden, daß das Netz nicht ganz dem Nullachsenkomplex angehört, und daß die unendlich ferne Gerade von Π keine Nullachse ist.

Beschreibt a eine Gerade G allgemeiner Lage in Π, so dreht sich seine Nullebene α um die zu G reziproke Polare G^r. Die in den Ebenen eines Büschels liegenden Netzstrahlen bilden aber i. a. eine Regelschar 2. O., zu dessen Leitschar die Brennstrahlen F_1, F_2 des Netzes gehören. Das Netzbild von G^r, der Schnitt der zuletzt genannten Regelschar mit Π, ist daher ein Kreis G^{rn}, der v trägt, weil G^r durch v geht. Unsre Verwandtschaft $\mathfrak{P}$ transformiert somit die Geraden G in die Kreise G^{rn}. Sie bietet sich also

[1]) Ein linearer Strahlkomplex, ein Strahlnetz und eine Regelschar 2. O. werden in Plückerschen Linienkoordinaten durch bzw. 1, 2, 3 lineare Gleichungen gegeben.

[2]) Wegen $F_1 \| J_1$ und $F_2 \| J_2$ (vgl. S. 147) gehen F_1 und F_2 durch die absoluten Punkte $i_1\, i_2$. von Π, d. s. die uneigentlichen Punkte mit den rechtwinklig-homogenen Koordinaten $(i, 1, 0)$, $(-i, 1, 0)$. Für einen Kegelschnitt, $\sum_1^3 a_{ik}\, x_i\, x_k = 0$, $(a_{ik} = a_{ki})$, der durch i_1 und i_2 geht, folgt daraus $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = 0$; er ist also ein Kreis.

als eine Verallgemeinerung der Inversion an einem reellen Kreis dar; sie ist aber keine Inversion, denn für $a = v$ liegt wohl a' im Unendlichen; wird aber a als der uneigentliche Punkt einer durch v gehenden Geraden A angenommen so ist $a' = [Ak_u^n | A]$.

Wie jetzt gezeigt werden soll, ist die durch das Nullsystem und das Strahlnetz in Π hervorgerufene Verwandtschaft $\mathfrak{P}$ durch den Doppelpunktkreis K und den Nullpunkt v von Π bestimmt; aber auch umgekehrt kann durch die willkürliche Annahme von $\mathfrak{K}$ und v ein linearer Strahlkomplex (Nullsystem) mittels einer Netzprojektion festgelegt werden, sodaß nach L. Eckhart (K, v) als Bildfigur eines linearen Strahlkomplexes angesehen werden kann. Um bei vorgegebenem (K, v) zu einem Punkt a den entsprechenden a' zu erhalten[1], legt man durch a eine den Kreis K in zwei reellen Punkten 1, 2 schneidende Gerade. Der Geraden $[1\,2]$ entspricht der durch 1, 2 und v bestimmte Kreis, der aus der Geraden $[va]$ den gesuchten Punkt a' ausschneidet. Weiterhin erkennt man daraus, daß der uneigentlichen Geraden U von Π der zu K konzentrische Kreis V^n durch v entspricht. V^n ist also der Netzriß der reziproken Polare V von U. Da v ihr Bildspurpunkt ist, bedeutet der zu v auf V^n diametral gegenüberliegende Punkt ihren Netzfluchtpunkt (s. S. 148), also auch den Netzfluchtpunkt der Zentralachse eines zugehörigen Kräftesystems. Daß eine Bildfigur (K, v) einen linearen Strahlkomplex bestimmt, erkennt man so: Irgend drei Punkte 1, 2, 3 von K (K von einer Geraden verschieden) können als zusammenfallende Bildpaare von drei Nullachsen I, II, III (zugleich Netzstrahlen) eines Nullsystems angesehen werden, das im übrigen durch das Paar (v, Π) als Nullpunkt und Nullebene bestimmt ist, falls v nicht auf K liegt. Liegt nämlich v etwa nicht auf $[1\,2]$, so ist $[1\,2]$ die reziproke Polare der aus v an die beiden Nullachsen I und II legbaren Schneidenden G, während III eine dieses Polarenpaar nicht schneidende Nullachse ist. — Liegt aber v auf K, so gehört G der Regelschar 2. O. an, die von jenen K schneidenden Nullachsen gebildet werden, die zugleich Netzstrahlen sind. K ist somit der Netzriß der Geraden G und v deren Bildspurpunkt. Wir kommen also in diesem Sonderfall zu der von L. Tuschel[2]) eingehend behandelten Abbildung der Raumgeraden auf die befestigten Kreise der Bildebene, wenn unter dieser Benennung das aus einem Kreis und einem auf diesem liegenden Punkt bestehende Gebilde verstanden wird. Vom Standpunkt der Eckhartschen Abbildung des linearen Strahlkomplexes ist hier der befestigte Kreis (K, v) das Bild des speziellen linearen Komplexes mit der Achse G (d. i. die Mannigfaltigkeit aller G schneidenden Geraden).

Die Verwandtschaft $a' = a\mathfrak{P}$ gibt einen unmittelbaren bildmäßigen Ausdruck des Nullsystems für alle Punkte a die Bildebene, denn die zu einem solchen Punkt gehörige Nullebene hat die Bildspur $[a, a']$ und den Netzpunkt a'. Sie gestattet aber unter Hinzunahme der früher entwickelten Hilfsmittel auch die Lösung der allgemeinen Aufgabe, zu jedem beliebigen Raumpunkt die zugehörige Nullebene zu finden, Abb. 9. Der gegebene Raumpunkt a sei durch seinen Grundriß a' und seine Höhenkote $\mathfrak{z}$ gegeben. Daraus ergibt sich wie in Abb. 2 der Netzriß a^n. Die reziproke Polare der uneigentlichen Geraden der Bildebene wird, wie früher erwähnt wurde, im Netzriß durch den zu K konzentrischen Kreis V^n durch v dargestellt. Wir legen durch a eine zu Π parallele Ebene Π_z, die wir als Hilfsbildebene auffassen, und in der wir das frühere Verfahren anwenden. An Stelle des Kreises K tritt in Π_z der Kreis K_z, in dem die durch K gehende Regelschar von Netzstrahlen (zugleich Komplexstrahlen) Π_z schneidet und an Stelle von v tritt der Nullpunkt v_z von Π_z. Statt in Π_z selbst zu zeichnen, konstruieren wir im Netzriß von Π_z, der nach Satz 1 ein zum Feld Π_z ähnliches Feld ist. Der Netzriß von

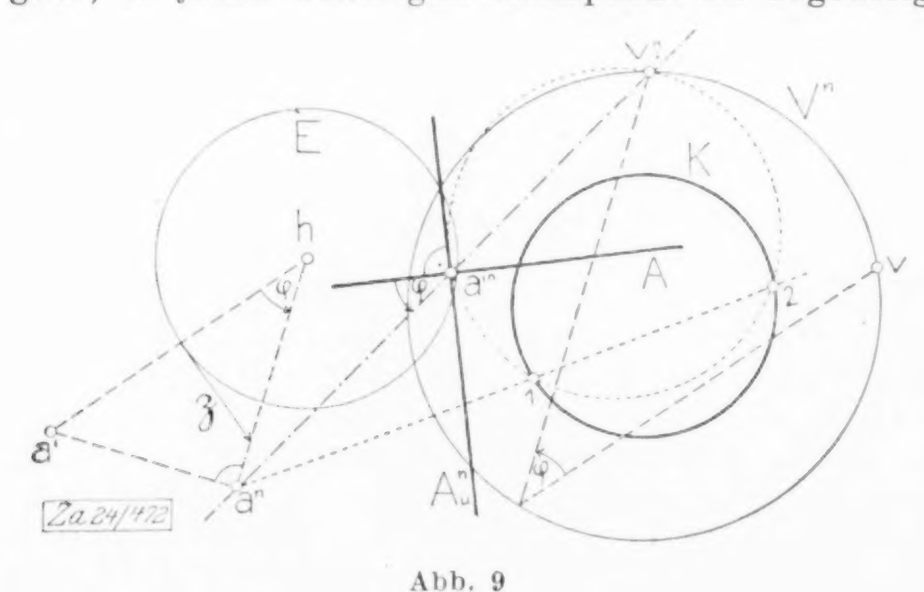


Abb. 9

[1]) Diese Konstruktion wird in Abb. 9 angewendet, wo indes v mit v_z^n und a mit a^n bezeichnet sind.

[2]) Vergl. die S. 146 Fußnote 2 genannte Abhandlung von L. Tuschel.

K_z ist K selbst; um den Netzriß von v_z zu erhalten, haben wir jenen Punkt v_z von V zu suchen, dessen Höhenkote $\mathfrak{z}$ beträgt. Wir entnehmen in $\widehat{a'ha''}$ die Winkelkote φ und finden nach Satz 3 v_z'' als jenen Punkt des Kreises V_n, für den der zum Bogen $\widehat{vv_z''}$ gehörige Peripheriewinkel gleich φ ist. Wir suchen nun in der durch K und v_z'' bestimmten Verwandtschaft $\mathfrak{P}$ nach dem zuletzt besprochenen Verfahren zu a'' den entsprechenden Punkt a'''. a''' ist der Netzpunkt der gesuchten Nullebene α und $[a''a''']$ das Bild ihrer in Π_z liegenden Spurparallelen von α. Wir erhalten, vergl. Abb. 4, somit die Bildspur A von α, indem wir $[a''a''']$ um a''' durch den Winkel $-\varphi$ drehen. Die Netzfluchtspur A_u'' ist dann $[a'''|A]$. 352

Motorrechnung, ein neues Hilfsmittel der Mechanik.

Von **R. v. MISES** in Berlin.[1])

Wer heute mit Aufgaben aus der Mechanik, die über das allereinfachste hinausgehen, zu tun hat, wird kaum auf das bequeme Hilfsmittel der Vektorrechnung verzichten. Wir können uns nur schwer in die erst wenige Jahrzehnte zurückliegende Zeit versetzen, in der die Begriffsbildungen und vor allem die Formeln der Vektoranalysis den »angewandten Mathematikern« so fremd waren, daß Lehrbücher der Mechanik von ihnen nur mit der größten Vorsicht, in sparsamem Ausmaß und nach langen Vorbereitungen, Gebrauch zu machen wagten. In den folgenden Zeilen soll nun ein ähnliches Hilfsmittel dargelegt werden, das aber nicht, wie gleich vorausgeschickt sei, die Vektorrechnung zu ersetzen oder abzulösen berufen ist, sie vielmehr für einen bestimmten Aufgabenkreis ergänzen will. Es handelt sich hier also keineswegs um eine der vielen Formen oder Gestalten, in die man das in der Vektorrechnung Wesentliche fassen kann; ob man beim Arbeiten mit gerichteten Größen die Symbolik der heutigen Vektoranalysis benutzt oder die der Graßmannschen Ausdehnungslehre oder der Quaternionen- oder der Matrizenrechnung, ist ein müßiger Streit, zu dem hier kein Beitrag geliefert werden soll. Der Kern der »Motorrechnung«, wie wir das neue Verfahren im Anschluß an ein von E. Study eingeführtes Wort nennen wollen, liegt vielmehr darin, daß man bei vielen Aufgaben der Mechanik den Gedankenweg, der von der Koordinaten- oder Komponentenrechnung zu den Vektoren führt, noch um einen Schritt fortsetzen kann. Wie es der wesentliche Erfolg des Operierens mit Vektoren ist, daß alle Rechnungen von der willkürlichen Wahl von Koordinaten-Richtungen unbeeinflußt bleiben, so kann man sich in vielen Fällen auch von der willkürlichen Wahl eines Koordinaten-Anfangspunktes frei machen, indem man mit den »Motoren« rechnet.

Seit man in der Lehre vom Gleichgewicht und von der Bewegung zu Problemen des dreidimensionalen Raumes übergegangen ist, weiß man, daß die Zusammensetzung beliebiger Kräfte oder Geschwindigkeiten zu einer Größe führt, die kein einfacher Vektor mehr ist, auch kein »liniengebundener« Vektor wie eine Kraft mit fester Angriffslinie, sondern etwas allgemeineres, ein Komplex von Kraft und Kräftepaar, wofür man verschiedene Bezeichnungen verwendet: Dyname, Schraube, Linien- oder Stabsumme, Zentralachse usf. In der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts hat vor allem der Engländer Sir Robert Ball eine Ausgestaltung der »Schraubentheorie« in geometrischer Richtung unternommen und Felix Klein hat in Deutschland mit großem Nachdruck auf die Anschaulichkeit, den elementaren Charakter und die große Verwendbarkeit der Ballschen Entwicklungen für die Mechanik des starren Körpers hingewiesen. Einen sehr bedeutenden Fortschritt über Ball hinaus stellt das grundlegende, leider viel zu wenig bekannte Werk von E. Study, die Geometrie der Dynamen dar[2]), daß 1903 erschienen, zum

[1]) Die Grundgedanken der vorliegenden Arbeit sind schon im Jahre 1912 entstanden und damals in einer vorläufigen Fassung innerhalb eines kleineren Kreises von Fachgenossen verbreitet worden. Auch in mehreren Vorträgen und in Universitäts-Vorlesungen habe ich seither von einzelnen Teilen Mitteilung gemacht. Die vollständige Ausarbeitung sollte E. Study zu seinem 60. Geburtstage am 23. März 1922 gewidmet werden, der Abschluß verzögerte sich aber aus verschiedenen äußeren Gründen. Möge der Aufsatz jetzt noch dazu beitragen, auf die große Fruchtbarkeit der leider viel zu wenig beachteten »Geometrie der Dynamen« von Study nachdrücklich hinzuweisen.

[2]) E. Study, Geometrie der Dynamen. Die Zusammensetzung von Kräften und verwandte Gegenstände der Geometrie. Leipzig, Teubner 1903.

Teil schon früher veröffentlichte Arbeiten des Verfassers zu einem großen, geschlossenen Lehrgebäude zusammenfaßt, dabei in sehr schwierige, den mechanischen Anwendungen heute noch ferne Gebiete hinübergreifend. Für uns ist von den elementaren Ergebnissen Studys vor allem dies wichtig, daß, wie der Vektor durch ein Punktepaar (Anfangs- und Endpunkt der gerichteten Strecke) bestimmt wird, sich die Dyname oder der Motor durch ein Geradenpaar versinnlichen läßt und daß man auf Grund dieser geometrischen Darstellung eine »geometrische Addition« von Motoren erklären kann. Ich gehe nun noch einen Schritt weiter als Study und führe in völliger Analogie zu den beiden Produktbildungen der Vektorrechnung ein skalares und motorisches Produkt zweier Motoren ein, die, wie sich zeigt, beide unmittelbare und elementare Bedeutung in der Mechanik besitzen. Damit ist schon das wichtigste Handwerkzeug zur Erreichung des oben angedeuteten Zieles völliger Unabhängigkeit vom Koordinatensystem gewonnen. Bei Study selbst ist die hier gebrauchte Rechnungsart nicht enthalten, sie wird dort ersetzt durch die Symbolik der komplexen »dualen« Zahlen, die sich zu unserer Motoranalysis ähnlich verhält wie die Lehre von den Quaternionen zu der gewöhnlichen Vektorrechnung.

So verbreitet heute auch Kenntnis und Anwendung der einfachsten Vektorformeln sind, pflegt man doch fast allgemein, namentlich in der technischen Literatur, mit der Auswertung vektoranalytischer Hilfsmittel an einer zu frühen Stelle aufzuhören. Es ist unrecht, bei den mechanischen Begriffen der Kraft, der Geschwindigkeit, Beschleunigung usf. die bequeme Vektor Vorstellung zu benutzen, dann aber bei den höheren Gebilden, wie Trägheitsmoment, Spannungszustand, Deformation u. ähnl. auf die ganz analogen Vorteile zu verzichten, die eine folgerichtige Weiterführung jener Vorstellungs- und Begriffsbildungen gewährt. Eine gewisse Erklärung für diesen Zustand mag man darin finden, daß unter den Theoretikern dieses Gebietes noch größere Uneinigkeit herrscht als unter den Professionisten der Vektorrechnung, so daß über dem wenig gehaltvollen Streit, ob man von »Tensoren« oder von »Dyaden« oder von »Matrizen« sprechen soll, beinahe versäumt wird, die einfachen und über allen Streit erhabenen Grundgedanken herauszuschälen und für den praktischen Gebrauch bereitzustellen. Mit der neuen Motorrechnung steht es nun so, daß auch sie ihren vollen Nutzen in der Mechanik erst bewährt, wenn man die Gebilde zweiter Stufe, also die Motor-Dyade (oder den Motor-Tensor, die Motor-Matrix) mit in den Kreis der Betrachtung zieht. Mit Rücksicht auf den eben angedeuteten Stand der Dinge will ich im folgenden Vertrautheit mit der gewöhnlichen, vektorischen Dyadenrechnung nicht voraussetzen, sondern benutze die vielleicht manchem Leser willkommene Gelegenheit, eine ganz knapp gefaßte, aber wie ich glaube, anschauliche und leicht verständliche Einführung in dieses Gebiet zu geben, bevor ich die Gebilde zweiter Stufe der Motorechnung in unmittelbarster Analogie dazu entwickle[1]). Die Motor-Dyade und was damit zusammenhängt, ist von Study nicht ins Auge gefaßt worden.

In ihrem Gesamtaufbau zerfällt die vorliegende Arbeit in drei Abschnitte[2]), von denen der erste im Anschluß an eine kurze Andeutung der bekannten vektoranalytischen Grundbegriffe die einfachsten Definitionen der Addition und Multiplikation von Motoren entwickelt, dabei nur flüchtig die Bedeutung der Definitionen für die verschiedenen Aufgaben der Mechanik berührend. Der zweite Abschnitt bringt, wie gesagt, zunächst eine kurze Darstellung der Hauptpunkte der Dyadenrechnung, d. h. Erklärung des Dyadenbegriffes innerhalb der gewöhnlichen dreidimensionalen Vektoranalysis, und knüpft daran die analogen Entwicklungen für das Gebiet der Motorrechnung. Im letzten Abschnitt werden schließlich an einer Reihe von Beispielen aus der allgemeinen Mechanik, aus der Dynamik des starren Körpers, aus der Baumechanik und der Hydraulik die Anwendungsmöglichkeiten der neuen Begriffsbildungen und Formeln angedeutet. Nicht eingegangen bin ich auf eine etwas abseits liegende Analogie, die zwischen dem Motor als einem durch sechs skalare Größen bestimmten geometrischen Gebilde und den sogenannten »Sechservektoren« der Relativitätstheorie besteht. Dem Kundigen mag der Hinweis genügen, daß der Motor in gewissem Sinn als der Sechservektor der reellen vierdimensionalen Liniengeometrie erscheint.

[1]) Die Tensor- bezw. Dyadenrechnung ist, wie bekannt, von W. Voigt, andererseits von J. W. Gibbs, begründet worden. In entschiedenster Weise hat aber erst G. Jaumann auf die Bedeutung des Dyadenbegriffes für die gesamte Physik hingewiesen. Vgl. etwa Archiv d. Mathem. u. Phys. Bd. 25. 1916, S. 33 bis 42.

[2]) Wegen Raummangel erscheint der dritte Abschnitt erst im folgenden Heft.

I. Motorrechnung der ersten Stufe.

1. Vektor; Stab und Keil. Wenn man in den gebräuchlichen Darstellungen der Vektorrechnung an ihrer Spitze die Erklärung findet, der Vektor sei eine »gerichtete Größe«, so muß jeder Vernünftige erkennen, daß damit soviel wie nichts gesagt ist. Die andere Definition, der man ebenso häufig begegnet, der Vektor sei ein »Zahlentripel«, ist offenbar zu weit, denn die Zahl der Männer, Frauen und Kinder an einem Ort ist gewiß kein Vektor. In der Tat kann man für den Vektor sowohl eine analytische wie eine geometrische Definition geben; mit der analytischen werden wir uns in II beschäftigen, hier soll zunächst von der geometrischen ausgegangen werden.

Wenn zwei Punkte a und b ihrer Lage nach gegeben sind und außerdem festgesetzt ist, welcher von ihnen als erster, welcher als zweiter gelten soll, so wollen wir sagen: es ist ein geordnetes Punktepaar gegeben. In der Zeichnung stellt man ein geordnetes Punktepaar am besten dar, indem man vom ersten zum zweiten Punkt eine mit Pfeilspitze versehene Gerade zieht. Die Umgrenzung oder Definition des Vektorbegriffes wird dann durch die beiden folgenden Sätze geleistet: a) Jedes geordnete Punktepaar bestimmt einen Vektor; b) alle geordneten Punktepaare die durch Parallelverschiebung ineinander überführbar sind, bestimmen denselben Vektor. Aus diesen Sätzen kann man sofort schließen, daß alle Vektoren durch Punktepaare mit einem und demselben Anfangspunkt o darstellbar sind und dann nur durch die Lage des Endpunktes bestimmt werden; die Mannigfaltigkeit der Vektoren ist daher wie die der Punkte im Raum eine dreifache, in der Ebene eine zweifache. Nimmt man o zum Ursprung eines Cartesischen Koordinatensystems, so kann man die drei Koordinaten des Endpunktes als Bestimmungsstücke des Vektors betrachten, sie seine »Komponenten« nennen usf. Man kann aber auch Richtung und Größe der Verbindungsstrecke, die allen denselben Vektor darstellenden Punktepaaren gemeinsam ist, als seine Bestimmungsstücke nehmen. Wie man weiter alle Sätze und Formeln der Vektorrechnung auf Grund der hier gegebenen Definition entwickelt, ist nicht Gegenstand unserer Ausführungen; auf den einen oder andern Punkt werden wir noch zurückkommen.

In der Mechanik des starren Körpers lernt man den Begriff der Kraft kennen, die durch Richtung, Größe und Lage der Angriffslinie bestimmt ist. Man pflegt die Kraft einen »gebundenen« oder »linienflüchtigen« Vektor zu nennen, wir wollen dafür mit Study kürzer sagen, die Kraft sei ein »Stab«. Der Stab wird in ähnlicher Weise definiert wie der Vektor, nämlich durch die Sätze: a) Jedes gerichtete Punktepaar bestimmt einen Stab; b) alle gerichteten Punktepaare, die durch Verschiebung längs ihrer Verbindungsgeraden ineinander überführbar sind, bestimmen denselben Stab. Man leitet daraus ohne weiteres ab, daß alle Stäbe, abgesehen von gewissen Ausnahmen, sich durch Punktepaare darstellen lassen, deren Anfangspunkte in einer festen, willkürlich gewählten Ebene liegen, Abb. 1; nur die dieser Ebene parallelen Stäbe fallen dabei aus. Nimmt man die Ebene zur x-y Ebene eines Cartesischen Koordinatensystems, so kann man die beiden Koordinaten des Anfangspunktes und die drei des Endpunktes als Bestimmungsstücke des Stabes ansehen. Die Mannifaltigkeit der Stäbe im Raum ist also eine fünffache (durch die der Ebene parallelen Stäbe wird diese Zählung nicht beeinträchtigt); die Mannigfaltigkeit aller Stäbe, die in einer Ebene liegen, ergibt sich nach der gleichen Betrachtungsweise als eine dreifache. Aber ein wesentlicher Unterschied zwischen dem Stab und dem Vektor liegt darin, daß man hier nicht fünf Bestimmungsstücke von gleich guter Verwendbarkeit angeben kann, wie die drei Komponenten des Vektors. Die früher genannten fünf Koordinaten leisten das offenbar nicht und wenn man etwa die Entfernung ab nimmt und dazu vier Größen sucht, die die Lage einer Geraden (samt Richtungssinn) im Raum bestimmen, so hat man damit die Schwierigkeit nur auf die Wahl geeigneter Geraden-Koordinaten abgewälzt. Die Schwierigkeit ist in der Natur der Sache begründet und kommt auch darin zum Ausdruck, daß es für Stäbe keine Addition in der Art gibt wie für Vektoren; doch davon später.

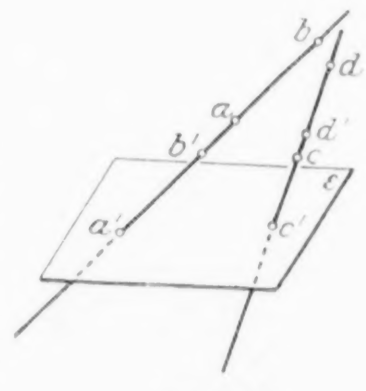


Abb. 1

Study hat dem Begriff des Stabes einen ihm im Sinne der Geometrie dualen gegenübergestellt, den des »Keiles«, der zwar nur von theoretischem Interesse ist, aber seines anschaulichen und elementaren Charakters wegen hier erwähnt werden soll. Man kann so gut wie von einem geordneten Punktpaar auch von einem geordneten Ebenen-

paar« sprechen, sobald zwei sich schneidende Ebenen α, β, Abb. 2, gegeben sind und eine von ihnen als die »erste« gekennzeichnet ist. Man definiert nun den Keil durch die Sätze: a) Jedes geordnete Ebenenpaar bestimmt einen Keil; b) alle geordneten Ebenenpaare, die durch Drehung um ihre Schnittgerade ineinander überführbar sind, bestimmen denselben Keil. Man erkennt leicht, daß die Mannigfaltigkeit der Keile ebenfalls eine fünffache ist. Der Keil kann etwa durch die Gerade, die sein Träger ist, und die »Oeffnung«, nämlich den in geeignetem Maß gemessenen Winkel der Ebenen (einschließlich des Drehsinnes) bestimmt werden. Study zeigt, wie man die Stäbe und Keile des Raumes einander ein-eindeutig zuordnen kann, so daß also Stab und Keil gegeneinander austauschbar sind. — In der Mechanik des starren Körpers tritt außer der Kraft auch die Drehgeschwindigkeit als Stab auf. So eng die Vorstellung der Kraft mit der des Stabes, nämlich des an eine feste Gerade gebundenen Punktepaares von fester Länge, verknüpft sein mag, so anschaulich erscheint andererseits für den Begriff der Drehgeschwindigkeit die Darstellung durch den Keil: Sein Träger gibt die Drehachse, die Oeffnung und der Drehsinn von der ersten zur zweiten Ebene geben das Maß der Winkelgeschwindigkeit. Wir müssen es uns hier versagen, diese Verhältnisse weiter auszuführen.

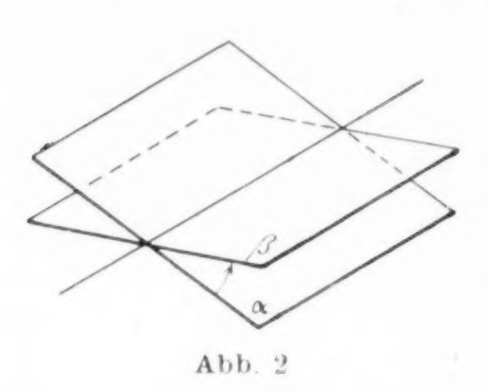


Abb. 2

2. Einführung des Motorbegriffes. Nach diesen Vorbereitungen ist es nicht mehr schwer, den »Motor« zu definieren. Zwei Gerade A, B, die nicht parallel sind, besitzen stets eine und nur eine gemeinsame Normale N, die beide schneidet, Abb. 3, und »Achse« des Geradenpaares A, B heißen soll. Liegen A und B in einer Ebene, so ist N das im Schnittpunkt von A, B errichtete Lot zur Ebene. Wenn man A und B parallel zu sich selbst um gleiche Stücke längs der Achse verschiebt, nämlich so, daß die Schnittpunkte von A, B mit der Achse längs dieser gleiten, oder wenn man A und B durch gleiche Winkel um die Achse dreht, so erhält man immer wieder Geradenpaare mit derselben Achse. Man kann dies so ausdrücken: Wird ein Geradenpaar um seine anfängliche Achse geschraubt, so bleibt diese dauernd seine Achse. Der Satz ist die Analogie des folgenden, ganz selbstverständlichen über ein Punktepaar: Wird ein Punktepaar längs seiner ursprünglichen Verbindungsgeraden parallel verschoben, so bleibt diese dauernd die Verbindungsgerade; ein ganz entsprechender Satz über die Drehung eines Ebenenpaares braucht nicht erst ausgesprochen zu werden.

Fügen wir jetzt hinzu, daß ein Geradenpaar wieder »geordnet« heißen soll, wenn eine der beiden Geraden als die »erste« gekennzeichnet ist, so können wir durch die beiden folgenden Sätze den »Motor« definieren: a) Jedes geordnete Geradenpaar bestimmt einen Motor; b) alle geordneten Geradenpaare, die durch Schraubung um ihre Achse ineinander überführbar sind, bestimmen denselben Motor. In Abb. 3 stellen die Geradenpaare A, B und A', B' denselben Motor dar, wenn N die gemeinsame Normale sowohl von A, B wie von A', B' ist, wenn die längs N gemessene Entfernung von A nach B gleich und gleichgerichtet ist der von A' nach B' und wenn endlich der Winkel und Drehungssinn von A nach B übereinstimmt mit dem von A' nach B'. Der Motor wird somit durch sechs Stücke bestimmt, die Entfernung von der ersten zur zweiten Geraden, ihren Winkel und die vier Bestimmungsstücke der Achse; die Mannigfaltigkeit der Motoren im Raum ist eine sechsfache. Man weiß aus der Mechanik, daß die Mannigfaltigkeit der Kräftesysteme und die der Geschwindigkeitszustände eines starren Körpers ebenfalls sechsfach ist und wir werden später sehen, daß diese beiden für die Bewegungslehre so grundlegenden Größen »Motoren« sind, wie eine Einzelkraft ein Stab, wie die Geschwindigkeit eines Punktes ein Vektor ist. Dieser Bedeutung wegen und wohl in äußerem Anklang an das Wort »Vektor« hat Study die Bezeichnung »Motor« gewählt. Wie sich auch im weiteren herausstellen wird, ist bei einem Motor, der eine Schraubengeschwindigkeit darstellt, die Entfernung AB — wir nennen sie die »Länge« des Motors — ein Maß der Translation, der tangens des Winkels AB — wir nennen ihn die »Oeffnung« des Motors — ein Maß der Drehgeschwindigkeit, während natürlich die »Motorachse«, d. h. die Achse des Geradenpaares A, B, zugleich die Schraubenachse bildet.

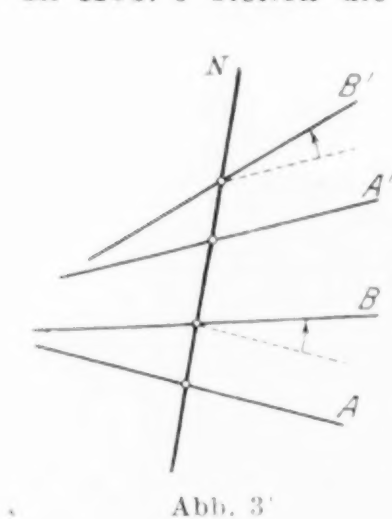


Abb. 3

In den Definitionssätzen ist der Fall, daß die beiden Geraden des Paares parallel sind, nicht ausgenommen worden, obwohl zwei parallele Gerade keine eindeutig bestimmte Achse besitzen. Wir müssen also unsere Festsetzung ergänzen und tun es in dem Sinne, daß jede gemeinsame Normale zweier paralleler Geraden als ihre Achse gelten soll. Zwei Parallelpaare A, B und A', B' bestimmen dann gemäß Satz b) denselben Motor, wenn der Abstand AB gleich und gleichgerichtet ist dem Abstand $A'B'$. Denn zu solchen vier Geraden, Abb. 4, gibt es eine (event. ins Unendliche fallende) alle vier schneidende, gemeinsame Normale und um diese kann A, B in die Lage A', B' geschraubt werden. Als Achse des durch ein Parallelpaar dargestellten Motors bezeichnen wir daher jede der ∞^2 Geraden, die den gemeinsamen Normalen parallel sind, während der durch nicht-parallele Gerade dargestellte Motor eine eindeutig bestimmte Achse besitzt. Wo im folgenden eine Unterscheidung notwendig ist, werden wir den Motor mit mehrdeutiger Achse als »uneigentlichen« bezeichnen.

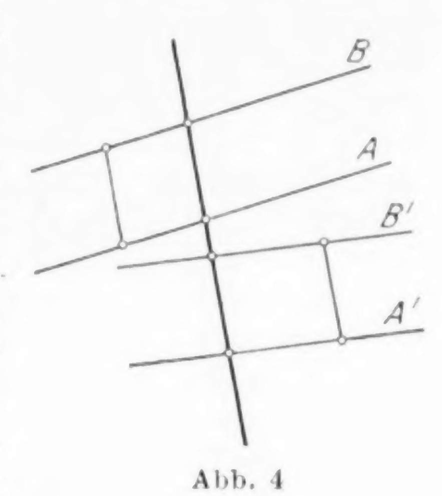


Abb. 4

Die Mannigfaltigkeit der Geradenpaare, die einen und denselben eigentlichen Motor darstellen, ist eine zweifache; denn es sind zwei einfachzählende, voneinander unabhängige Bewegungen zulässig: Gleiten längs einer festen Geraden und Drehung um diese. Beim uneigentlichen Motor ist diese Mannigfaltigkeit, wie man leicht erkennt, dreifach. In jedem Falle gilt der wichtige Satz: Als Anfangsgerade des einen gegebenen Motor darstellenden Geradenpaares kann jede Gerade gewählt werden, welche die (bezw. eine) Achse des Motors senkrecht schneidet.

Es braucht wohl nicht noch ausdrücklich gesagt zu werden, daß, wo hier von Schraubung die Rede ist, die Sonderfälle reiner Drehung oder reinen Gleitens eingeschlossen sein sollen und daß als Drehung um eine unendlich ferne Achse die Translation oder Gleitbewegung gilt.

3. Geometrische Addition der Motoren. Das bekannte Verfahren der Vektoraddition kann in folgender Weise formuliert, bezw. in zwei Schritte zerlegt werden. Gegeben seien zwei Vektoren durch die geordneten Punktepaare $a_1 a_2$ und $b_1 b_2$; man stellt nun 1. die Vektoren durch zwei Paare mit gemeinsamem Anfangspunkt o dar, dies seien oa und ob und man sucht 2. zu den drei Punkten o, a, b, den vierten, o gegenüberliegenden Parallelogramm-Eckpunkt c; dann stellt oc den Summenvektor dar. In völliger Analogie dazu definieren wir im Anschluß an Study[1]): Gegeben seien zwei Motoren durch die geordneten Geradenpaare $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$: man stelle sie 1. durch zwei Geradenpaare OA, OB mit gemeinsamer Anfangsgeraden O dar; man suche 2. in einer beliebigen zu O senkrechten Ebene zu den drei Durchstoßpunkten o, a und b von O, A uud B den vierten, o gegenüber liegenden Parallelogramm-Eckpunkt c; dann ist der Ort der Punkte c eine Gerade C und der durch OC dargestellte Motor heißt die Summe der gegebenen Motoren (Abb. 5).

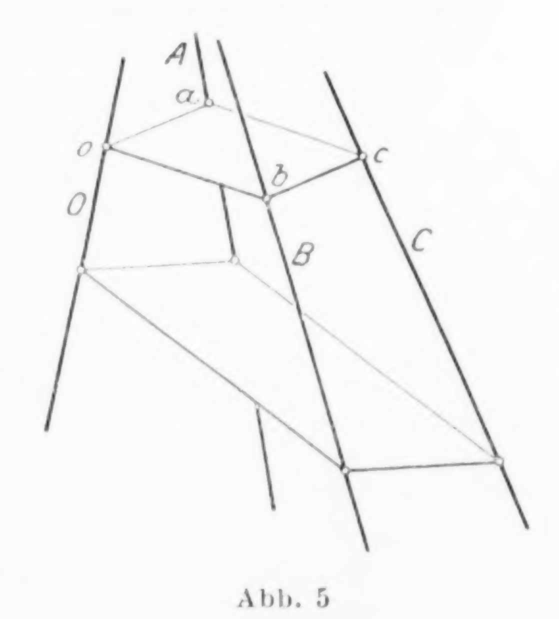


Abb. 5

Die Gerade O kann nicht willkürlich gewählt werden (dies ist ein Unterschied gegenüber dem Fall der Vektoraddition), sondern muß nach dem Satz am Schluß des vorangehenden Abschnittes die Achsen der gegebenen Motoren senkrecht schneiden, bezw. bei uneigentlichen Motoren eine Achse eines jeden Motors. Eine solche Wahl ist immer möglich, weil es zu zwei beliebigen Geraden mindestens eine gemeinsame Normale gibt. Es bleibt nun noch zu beweisen, daß der Ort der Punkte c, die nach der Vorschrift der Definition aufgesucht werden, wirklich eine Gerade bildet. Um dies ohne viel Umstände einzusehen, denken wir uns O zur z-Achse eines gewöhnlichen Koordinatensystems gewählt und die Geraden A und B durch lineare Gleichungen, die nach x bezw. y aufgelöst sind, gegeben, also etwa A

[1]) Geometrie der Dynamen, S. 54.

durch $x = \alpha_1 + \alpha_2 z$, $y = \alpha_3 + \alpha_4 z$ und B durch $x = \beta_1 + \beta_2 z$, $y = \beta_3 + \beta_4 z$. Setzt man für z einen festen Wert ein, so geben diese Gleichungen jedesmal die x- und y-Koordinaten der Punkte a und b, während der Punkt c nach der Konstruktion und den bekannten Eigenschaften einer Vektorsumme die Koordinaten $x = \alpha_1 + \beta_1 + (\alpha_3 + \beta_3) z$, $y = \alpha_2 + \beta_2 + (\alpha_4 + \beta_4) z$ besitzt. Da dies bei veränderlichem z wieder lineare Gleichungen sind, ist der Ort von c in der Tat eine Gerade C.

Die Vertauschbarkeit der Summanden ist in unserer Definition unmittelbar gegeben. Andere einfache Sätze, wie die beliebige Zusammenfaßbarkeit von Summanden bei einer Summe mehrerer Motoren, die Beziehungen zur Multiplikation mit einer ganzen Zahl, dann die Ausartungen in den Sonderfällen uneigentlicher Motoren, sich schneidender Geradenpaare usf. lassen sich ohne viel Mühe durch weitere Verfolgung der Konstruktion Abb. 5 herleiten. Wir gehen darauf nicht ein, da uns in späterem Zusammenhang alle diese Ergebnisse von selbst zufallen werden. Wer sich in den geometrischen Vorstellungskreis einarbeiten will, wird aber gut tun, sich einzelne dieser Gedankengänge selbst zurechtzulegen.

4. Moment eines Motors. Die geometrische Theorie der Zusammensetzung von Kräften in der Ebene beruht in letzter Linie auf einem einfachen planimetrischen Satz, der von Varignon, dem Begründer der ebenen Statik, stammt und einen Zusammenhang zwischen den Längen der anstoßenden Seiten eines Parallelogramms, seiner Diagonale und den drei Abständen dieser Geraden von einem beliebigen Punkt feststellt. Eine ähnliche Rolle spielt in der allgemeinen Statik der folgende, für die Geometrie der Motoren grundlegende Satz: Fällt man von einem Punkte o (Abb. 6) die Lotebenen α und β auf zwei Gerade A und B, schneidet A mit β in a und B mit α in b, so bleibt die Strecke ab nach Größe und Richtung unverändert, wenn man o festhält und das Geradenpaar AB gemeinsam um seine Achse schraubt. Nach den Definitionen von Vektor und Motor lautet der Satz kürzer so: Der Vektor, der durch die Schnittpunkte a, b zweier Geraden A, B mit den von einem Punkt o aus gefällten Lotebenen β, α dargestellt wird, hängt außer von o nur vom Motor AB ab. Diesen Vektor werden wir vorläufig das Moment des Motors für den Punkt o nennen. Indem wir den Satz zu beweisen suchen, erhalten wir noch darüber hinaus Aufschlüsse über das Verhalten dieses Momentvektors.

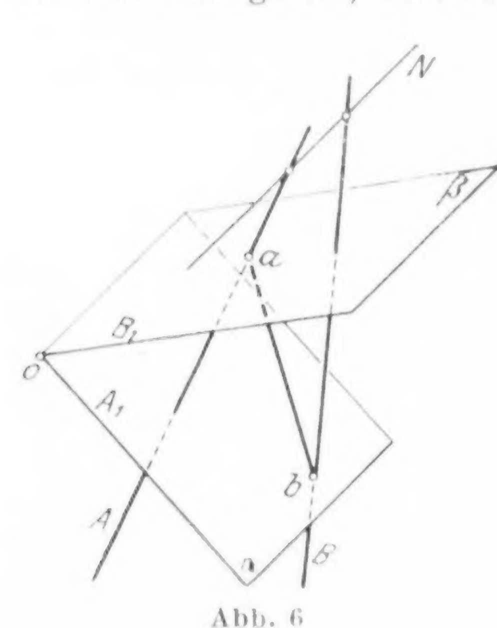


Abb. 6

Zunächst ist klar, daß eine reine Gleitbewegung des Geradenpaares AB parallel der gemeinsamen Normalen N den Vektor ab ungeändert läßt; denn dabei bleiben ja die Lotebenen α und β erhalten und die Schnittpunkte a und b wandern gleichförmig mit A und B in der Richtung der Achse, die auch die Richtung des Schnittes von α und β ist, mit. Um den Einfluß der Drehung zu beurteilen, projizieren wir die ganze Raumfigur auf eine zur Normalen N senkrechte, also zu A und B parallele Ebene. In der Projektion (Abb. 7) erscheinen die beiden Geraden, deren Projektionen mit A', B' bezeichnet sind, unter ihrem wahren Winkel, die Lotebenen α, β bilden sich in ihren Spuren A_1, B_1 ab, die zu A', B' senkrecht stehen und die Projektion o' des Punktes o enthalten. Der Vektor ab besteht aus seiner Projektion $a'b'$ und einer zu N parallelen Komponente, deren Größe gleich dem Abstand der Geraden AB, also jedenfalls unveränderlich ist. Somit ist nur noch der planimetrische Satz zu beweisen, daß in Abb. 7 $a'b'$ der Größe und Richtung nach unverändert bleibt, wenn man die Geradenpaare A', B' und A_1, B_1 um n bezw. um o' durch gleiche Winkel in gleichem Sinn dreht. Nun ist in der Tat $a'b'$ senkrecht auf der festen Geraden no', denn in dem Dreieck $na'b'$ sind A_1 und B_1 zwei Höhen und durch ihren Schnittpunkt o' muß daher auch die dritte Höhe, d. i. das Lot von n auf $a'b'$ gehen. Aus der Aehnlichkeit $a'b'b_1 \sim no'b_1$ folgt $\overline{a'b'} : \overline{no'} = \overline{a'b_1} : \overline{nb_1}$ und da $\overline{a'b_1} = \overline{nb_1} \operatorname{tg}(A'B')$, so hat man $\overline{a'b'} = \overline{no'} \operatorname{tg}(A'B')$, d. h. die Größe von $a'b'$ ist

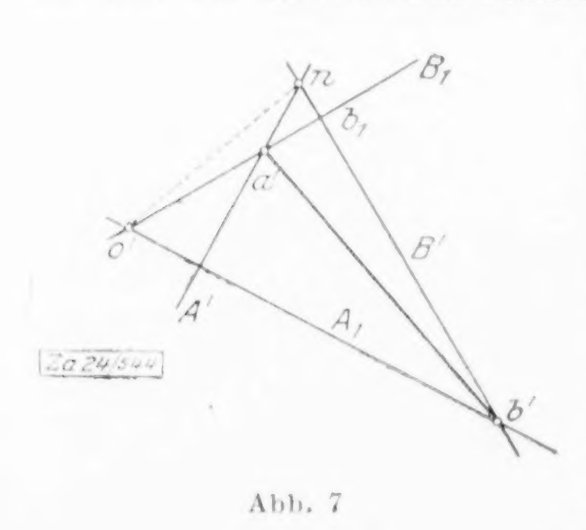


Abb. 7

das Produkt aus dem Abstand des Punktes o von der Achse mal dem Tangens des Winkels der Geraden A, B.

Kürzer kann man die Ergebnisse ausdrücken, wenn man die Bezeichnungen und Formeln der Vektorrechnung benutzt. Sei $\mathfrak{r}$ der Vektor $n\,o'$ und $\mathfrak{M}$ ein Vektor von der Größe tg $(A\,B)$, der nach jener Seite der Normalen N weist, von der aus gesehen die Drehung von A nach B positiv erscheint (also in Abb. 7 unter die Bildfläche), so ist der Vektor $a'\,b'$ das vektorielle Produkt $\mathfrak{M} \times \mathfrak{r}$. Diese Formel bleibt auch richtig, wenn $\mathfrak{r}$ den von einem beliebigen Punkt n der Achse nach o gezogenen Vektor bedeutet, da das Hinzufügen einer zu $\mathfrak{M}$ parallelen Komponente an dem Vektorprodukt nichts ändert. Nennen wir also $\mathfrak{M}_o$ das Moment des Motors für einen Punkt o, $\mathfrak{M}_n$ das für den Punkt n der Achse, so haben wir

$$\mathfrak{M}_o = \mathfrak{M}_n + (\mathfrak{M} \times \mathfrak{r}) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1),$$

wobei $\mathfrak{M}_n$ nichts anderes sein kann als der parallel N von A nach B weisende Vektor, dessen Länge der Abstand $A\,B$ ist. Wir fassen das Ergebnis zusammen, indem wir sagen: Durch einen Motor wird jedem Punkt o des Raumes ein Vektor $\mathfrak{M}_o$ zugeordnet; die Gesamtheit dieser Vektoren ist nach Gl. (1) durch zwei Vektoren $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}_n$ gegeben, von denen der letztere der Wert von $\mathfrak{M}_o$ für einen Punkt der Motorachse ist.

Den oben definierten Vektor $\mathfrak{M}$ nennen wir den Resultantvektor des Motors.

5. Vektorielle und skalare Komponenten. Addition und Multiplikation mit Skalaren. Wenn man die Vektorrechnung rein geometrisch entwickelt, muß man an einer späteren Stelle zeigen, daß, sobald drei Koordinatenrichtungen gewählt sind, alles in gewöhnliche skalare Rechnung übergeht. Dementsprechend wollen wir jetzt sehen, daß durch Wahl eines Bezugspunktes alle Motorrechnung (soweit wir sie bisher kennen und sie im folgenden weiter entwickeln werden) in Vektorrechnung aufgelöst werden kann. Zu diesem Zweck beweisen wir den Satz: Ein Motor ist eindeutig bestimmt durch seinen Resultantvektor $\mathfrak{M}$ und seinen Momentvektor $\mathfrak{M}_o$ für irgend einen Bezugspunkt o. In der Tat liefert $\mathfrak{M}$ nach Definition die Richtung der Achse und den Winkel des Geradenpaares $A\,B$ einschließlich des Drehungssinnes, und die Komponente von $\mathfrak{M}_o$ in der Richtung von $\mathfrak{M}$ gibt nach (1) den Abstand $A\,B$. Um dann noch die Lage der Achse N zu finden, müssen wir nach Gl. (1) bezw. nach der Konstruktion, die zu (1) geführt hat, von o aus senkrecht zur Ebene, die von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}_o$ gebildet wird, ein Stück von $o\,n$ fortschreiten, das mit der Länge von $\mathfrak{M}$ multipliziert die zu $\mathfrak{M}$ senkrechte Komponente von $\mathfrak{M}_o$ ergibt; der Richtungssinn von $o\,n$ ist dabei durch die Vorzeichenregeln des Vektorproduktes bestimmt.

Wir nennen $\mathfrak{M}$ die erste und $\mathfrak{M}_o$ die zweite Vektorkomponente des Motors für den Bezugspunkt o; die erste Vektorkomponente ist für alle Bezugspunkte gleich. Die zweimal drei skalaren Komponenten von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}_o$, bezogen auf irgend drei senkrechte Richtungen, nennen wir die sechs skalaren Komponenten des Motors. Für alles folgende führen wir nun eine einheitliche Schreibweise ein: Motoren sollen mit fetten gothischen Buchstaben bezeichnet werden; der gleiche Buchstabe nicht fett bezeichnet die erste Vektorkomponente, mit dem Zeichen o versehen die zweite Vektorkomponente bezogen auf o; der entsprechende lateinische Buchstabe die Größe der ersten Vektorkomponente, mit den Zeichen 1, 2, 3 versehen deren skalare Komponenten, mit den Zeichen 4, 5, 6 die skalaren Komponenten der zweiten Vektorkomponente. Der Motor $\boldsymbol{\mathfrak{M}}$ ist also nach Verfügung über einen Bezugspunkt o durch die beiden Vektoren $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}_o$, nach weiterer Verfügung über drei Bezugsrichtungen durch die sechs Zahlen M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6 darstellbar.

Die Bedeutung dieser Definitionen erhellt sofort aus dem Satz: Bei der geometrischen Addition der Motoren addieren sich ihre Vektor- und ihre Skalarkomponenten oder die Motorgleichung $\boldsymbol{\mathfrak{A}} + \boldsymbol{\mathfrak{B}} = \boldsymbol{\mathfrak{C}}$ ist gleichbedeutend mit den zwei Vektorgleichungen $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{A}_o + \mathfrak{B}_o = \mathfrak{C}_o$. Zunächst erkennt man, daß der Satz für jeden Bezugspunkt gelten muß, sobald er für einen gilt. Denn die Differenz der Momentvektoren eines Motors $\boldsymbol{\mathfrak{M}}$ für zwei Punkte o, o' ist nach (1)

$$\mathfrak{M}_o - \mathfrak{M}_{o'} = \mathfrak{M} \times (\mathfrak{r} - \mathfrak{r}') \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2).$$

Dabei kann man die Ortsvektoren $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}'$ der beiden Punkte o und o' von einem beliebigen Anfangspunkt aus rechnen. Wenn sich die $\mathfrak{M}$ und die $\mathfrak{M}_o$ additiv verhalten, so muß dies auch für die um $\mathfrak{M} \times (\mathfrak{r} - \mathfrak{r}')$ vermehrten $\mathfrak{M}_o$, d. i. für die $\mathfrak{M}_{o'}$ der Fall sein. Wir wählen nun in Abb. 5, in der die geometrische Addition ausgeführt ist, einen Be-

zugspunkt o auf der gemeinsamen Anfangsgeraden O der die Motoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ darstellenden Geradenpaare. Konstruiert man die Momentvektoren für dieses o nach der in Abschn. 4 gegebenen Vorschrift, so sieht man, daß sie durch die Punktepaare oa, ob, oc dargestellt werden, die in der Normalebene zu O liegen. Hier ist also nach der Regel, die für die Aufsuchung von c gegeben wurde, das Bestehen von $\mathfrak{A}_o + \mathfrak{B}_o = \mathfrak{C}_o$ evident. Diese Beziehung gilt aber auch für einen zweiten Punkt o' von O und daher ist $(\mathfrak{A}_o - \mathfrak{A}_{o'}) + (\mathfrak{B}_o - \mathfrak{B}_{o'}) = \mathfrak{C}_o - \mathfrak{C}_{o'}$. Dafür kann man nach (2) auch $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \times (\mathfrak{r} - \mathfrak{r}') = \mathfrak{C} \times (\mathfrak{r} - \mathfrak{r}')$ schreiben, wo $\mathfrak{r} - \mathfrak{r}'$ den Vektor $o'o$ bezeichnet, und da dieser sicher senkrecht auf $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ steht, folgt daraus $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{C}$.

Durch diese Zurückführung der Motor-Addition auf die bekannte Vektoraddition, und damit auch auf die gewöhnliche skalare, sind alle wesentlichen Eigenschaften der Addition, das kommutative und assoziative Gesetz usf., nachgewiesen. Wir können jetzt auch ohne weiteres die Erklärung der Multiplikation eines Motors mit einer Zahl anschließen, indem wir sagen: Produkt des Motors $\mathfrak{M}$ mit der Zahl λ, geschrieben $\lambda\mathfrak{M}$, soll der Motor heißen, dessen Komponenten (vektorielle und skalare) das λ-fache der Komponenten von $\mathfrak{M}$ sind. Diese Multiplikation ist distributiv mit der früher erklärten Addition, es ist insbesondere $\mathfrak{A} + \mathfrak{A} = 2\,\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A} - \mathfrak{B} = \mathfrak{A} + (-\mathfrak{B})$, wobei $-\mathfrak{B} = (-1)\,.\,\mathfrak{B}$. Kurz gesprochen: Man darf mit den bisher erklärten »linearen« Operationen so arbeiten, wie wenn ihre Objekte gewöhnliche Zahlen wären.

Eine besonders hervorzuhebende Anwendung dieser Rechenregeln ist die auf die Differentiation von Motoren. Ist ein Motor $\mathfrak{M}$ als Funktion der skalaren Größe t gegeben, so verstehen wir unter der Ableitung $\dfrac{d\,\mathfrak{M}}{d\,t}$ den Motor, dessen Komponenten die Ableitungen der Komponenten von $\mathfrak{M}$ sind.

6. Anwendungsbeispiel. Ehe wir weitergehen, soll die Anwendbarkeit der bisher eingeführten einfachen Begriffe an einem schönen Beispiel aus der Statik erläutert werden. O. Mohr hat für den von Culmann herrührenden Satz über die Beziehung von Seilecken, die zu gleichen Kräftesystemen gehören, einen Beweis gegeben, der eigentlich mit dem Grundgedanken der Motorrechnung arbeitet. Indem wir die Mohrsche Ueberlegung mit Hilfe der voranstehenden Ergebnisse darstellen, gewinnen wir gleich einen wesentlich allgemeineren Satz für räumliche Seilecke. Er lautet: Sind zwei räumliche n-Ecke Gleichgewichts-Seilfiguren zu denselben n Einzelkräften, so werden die gemeinsamen Normalen je zweier entsprechender Seiten der n-Ecke von einer Geraden rechtwinklig geschnitten (Abb. 8). Liegen die Kräfte und n-Ecke in einer Ebene, so sind die gemeinsamen Normalen die in den Schnittpunkten errichteten Lote zur Ebene: haben die Lote selbst, nach unserem Satz, eine gemeinsame, alle schneidende Normale, so liegen die Schnittpunkte auf einer Geraden, das ist die Culmannsche Gerade.

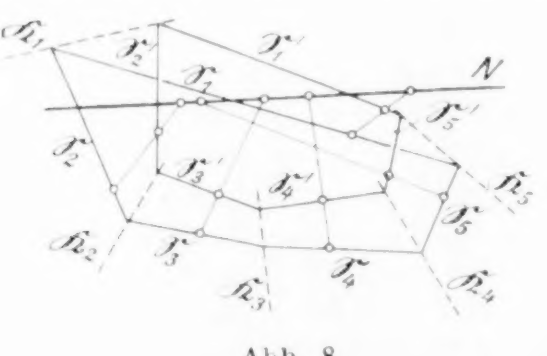


Abb. 8.

Für den Beweis müssen wir als gegeben voraussetzen, daß die Kräfte, mit denen wir es in der Statik zu tun haben, (spezielle) Motoren sind und daß die Gleichgewichtsbedingung darin besteht, daß die Motorsumme null ist. An jedem Eckpunkt des Seileckes besteht Gleichgewicht zwischen der äußeren Knotenkraft und den beiden Seilkräften. Nennen wir $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2 \ldots \mathfrak{K}_n$ die äußeren Kräfte, $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2 \ldots \mathfrak{S}_n$ die Seilkräfte in der Art, daß z. B. $\mathfrak{S}_3$ die Kraft bezeichnet, mit der das vom zweiten zum dritten Knotenpunkt gespannte Seil an dem letzteren wirkt, so lauten die Bedingungen des Gleichgewichtes:

$$\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{S}_1 - \mathfrak{S}_n, \quad \mathfrak{K}_2 = \mathfrak{S}_2 - \mathfrak{S}_1, \quad \mathfrak{K}_3 = \mathfrak{S}_3 - \mathfrak{S}_2, \quad \mathfrak{K}_n = \mathfrak{S}_n - \mathfrak{S}_{n-1}.$$

Für das zweite Seileck bestehen dieselben Gleichungen, nur daß hier neue Seilkräfte $\mathfrak{S}'$ an Stelle der $\mathfrak{S}$ treten. Subtrahiert man den einen Gleichungssatz vom anderen, so erhält man

$$\mathfrak{S}_1 - \mathfrak{S}_1' = \mathfrak{S}_2 - \mathfrak{S}_2' = \mathfrak{S}_3 - \mathfrak{S}_3' = \ldots \mathfrak{S}_n - \mathfrak{S}_n'.$$

Nun ist die Achse eines Kraftmotors die Kraft-Angriffslinie selbst. Nach der Definition in **3** kann man den Motor $\mathfrak{S} - \mathfrak{S}'$ durch ein Geradenpaar darstellen, dessen Anfangsgerade O die gemeinsame Normale der Achsen von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ ist. Andererseits schneidet die Achse eines Motors die darstellenden Geraden senkrecht. Also werden die

n gemeinsamen Normalen zusammengehöriger Seileck-Seiten von der Achse des Motors $\mathfrak{S}_1 - \mathfrak{S}_1' = \mathfrak{S}_2 - \mathfrak{S}_2' = \ldots$ senkrecht geschnitten.

Die Darstellung, die Mohr den Grundzügen der Statik und Kinematik gegeben hat[1]), arbeitet dem Wesen nach mit der Motoraddition (abgesehen davon, daß die Deutung des Motors als Geradenpaar fehlt). Aber Mohr hat nicht für die motorischen Größen eine besondere Bezeichnung eingeführt, sondern er ändert die Operationszeichen, setzt $\dotplus$ für die Summe und $\equiv$ für Gleichheit. Für die Weiterbildung des Verfahrens ist jedoch, ähnlich wie in der Vektorrechnung, der in unserer Bezeichnungsweise zum Ausdruck kommende Zusammenhang zwischen den Motorgrößen und ihren Komponenten von entscheidender Bedeutung.

7. Skalares und motorisches Produkt zweier Motoren. Wir gehen jetzt daran, die beiden Arten der Multiplikation zu erklären, durch deren Einführung die Motorrechnung auf der ersten Stufe ihren Abschluß erhält. Zunächst erklären wir: Skalares Produkt der beiden Motoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, geschrieben $\mathfrak{A}.\mathfrak{B}$ oder auch $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}$, heiße die Zahl

$$\mathfrak{A}.\mathfrak{B} = \mathfrak{A}\,\mathfrak{B}_o + \mathfrak{A}_o\mathfrak{B} = A_1 B_4 + A_2 B_5 + A_3 B_6 + A_4 B_1 + A_5 B_2 + A_6 B_3 \,. \quad (3).$$

Die zweite Definition (die aus der ersten nach den Regeln der Vektorrechnung folgt) drückt das skalare Produkt in völliger Abhängigkeit vom Koordinatensystem aus, die erste läßt es nur vom Anfangspunkt abhängig erscheinen. Wir müssen also noch zeigen, daß auch diese Abhängigkeit nur scheinbar ist. Bezeichnet $\mathfrak{r}$ den Vektor von o nach o', entsprechend dem früheren $\mathfrak{x}' - \mathfrak{x}$, so ist nach (2):

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}_{o'} + \mathfrak{A}_{o'}\mathfrak{B} = \mathfrak{A}(\mathfrak{B}_o + (\mathfrak{B}\times\mathfrak{r})) + \mathfrak{B}(\mathfrak{A}_o + (\mathfrak{A}\times\mathfrak{r})) = \mathfrak{A}\,\mathfrak{B}_o + \mathfrak{A}_o\mathfrak{B} + \mathfrak{A}(\mathfrak{B}\times\mathfrak{r}) + \mathfrak{B}(\mathfrak{A}\times\mathfrak{r}) \quad (3').$$

Die beiden dreifachen Produkte rechts heben sich auf infolge der bekannten Vertauschungsregel der Vektorrechnung, wonach $\mathfrak{B}(\mathfrak{A}\times\mathfrak{r}) = -\mathfrak{A}(\mathfrak{B}\times\mathfrak{r})$. Damit ist die Invarianz des in (3) definierten Produktes bewiesen.

Die Bedeutung des skalaren Produktes in der Mechanik entspricht dem des skalaren Produktes zweier Vektoren. Wenn $\mathfrak{K}$ einen Kraft-, $\mathfrak{G}$ einen Geschwindigkeitsmotor bezeichnet, so ist das skalare Produkt $\mathfrak{K}.\mathfrak{G}$ die Arbeitsleistung für die Zeiteinheit. Bezeichnet $\mathfrak{G}$ eine unendlich kleine Verschiebung, so $\mathfrak{K}.\mathfrak{G}$ die Arbeit, die die Kräfte bei dieser Verschiebung leisten. Gegenüber dem Vorgang der Vektorrechnung erspart man hier die Trennung in Arbeit der Translation und Arbeit der Rotation, eine Trennung, die von der willkürlichen Wahl des Bezugspunktes beherrscht wird.

Als Motorprodukt oder motorisches Produkt zweier Motoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ bezeichnen wir einen Motor $\mathfrak{P}$ mit folgenden Vektorkomponenten:

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{A}\times\mathfrak{B},\ \mathfrak{P}_o = (\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}_o) + (\mathfrak{A}_o\times\mathfrak{B}) \quad \ldots\ldots \quad (4).$$

Die Bestimmung der Resultantkomponente $\mathfrak{P}$ ist unmittelbar frei von der Verfügung über den Bezugspunkt. Für die zweite Komponente erhalten wir auf Grund von (2) wieder mit $\mathfrak{r} = \mathfrak{x}' - \mathfrak{x}$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}_{o'} &= (\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}_{o'}) + (\mathfrak{A}_{o'}\times\mathfrak{B}) = (\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}_o) + \mathfrak{A}\times(\mathfrak{B}\times\mathfrak{r}) + (\mathfrak{A}_o\times\mathfrak{B}) + (\mathfrak{A}\times\mathfrak{r})\times\mathfrak{B}\\ &= \mathfrak{P}_o + (\mathfrak{A}\times\mathfrak{B})\times\mathfrak{r} = \mathfrak{P}_o + (\mathfrak{P}\times\mathfrak{r}) \quad \ldots\ldots \quad (4').\end{aligned}$$

Dabei ist von dem bekannten Satz der Vektorrechnung Gebrauch gemacht, daß für drei beliebige Vektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{r}$ stets

$$[\mathfrak{A}\times(\mathfrak{B}\times\mathfrak{r})] + [\mathfrak{B}\times(\mathfrak{r}\times\mathfrak{A})] + [\mathfrak{r}\times(\mathfrak{A}\times\mathfrak{B})] = 0 \quad \ldots\ldots \quad (5).$$

Gl. (4′) zeigt, daß beim Uebergang zu einem neuen Bezugspunkt o' der nach (4) definierte neue Momentvektor aus dem für o sich ebenso rechnet wie sich für irgend einen Motor $\mathfrak{M}$ das Moment $\mathfrak{M}_{o'}$ aus $\mathfrak{M}_o$ und $\mathfrak{M}$ ergibt. Damit ist bewiesen, daß durch unsere Definition (4) wirklich jedem Paar von Motoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ ein neuer Motor $\mathfrak{P}$ zugeordnet wird. Die skalaren Komponenten von $\mathfrak{P}$ sind:

$$P_1 = A_2 B_3 - A_3 B_2 \ \ldots\ldots\ P_4 = A_2 B_6 - A_3 B_5 + A_5 B_3 - A_6 B_2 \quad . \ (4'').$$

Eine unmittelbare invariante Darstellung dieses und des skalaren Produktes folgt später (**8**).

Die mechanische Bedeutung des Motorproduktes ist folgende: Sei $\mathfrak{M}$ irgend ein im Raum unveränderlicher Motor (d. h. ein Motor, dessen 6 Komponenten inbezug auf ein festes Koordinatensystem Konstante sind) und $\mathfrak{G}$ der Geschwindigkeitsmotor eines

---

[1]) O. Mohr, Abhandlungen a. d. Gebiet d. technischen Mechanik, Berlin 1906, Abh. I und II, insbes. S. 15 ff.

bewegten starren Körpers. Dann ist $\boldsymbol{\mathfrak{M}} \times \boldsymbol{\mathfrak{G}}$ der scheinbare Zuwachs, den der Motor $\boldsymbol{\mathfrak{M}}$ in der Zeiteinheit erfährt, wenn er vom bewegten Körper aus betrachtet wird. Oder wenn $\boldsymbol{\mathfrak{M}}$ unveränderliche Komponenten in einem mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{\mathfrak{G}}$ bewegten Bezugssystem besitzt, liefern die Komponenten von $\boldsymbol{\mathfrak{G}} \times \boldsymbol{\mathfrak{M}}$ die Aenderungen, die die Komponenten von $\boldsymbol{\mathfrak{M}}$, im ruhenden Raum pro Zeiteinheit erfahren. Dieser Ausdruck spielt eine entscheidende Rolle bei der Aufstellung der Bewegungs-Gleichungen des starren Körpers.

Die beiden Definitionen (3) und (4), die die Produkte zweier Motoren auf die analogen Produktbildungen von Vektoren zurückführen, lassen erkennen, daß sich alle Rechenregeln aus der Vektoralgebra bezw. aus der skalaren Algebra hierher übertragen. Es gilt insbesondere: das kommutative Gesetz, beim Motorprodukt mit Zeichenwechsel:

$$\boldsymbol{\mathfrak{A}} \cdot \boldsymbol{\mathfrak{B}} = \boldsymbol{\mathfrak{B}} \cdot \boldsymbol{\mathfrak{A}}, \qquad \boldsymbol{\mathfrak{A}} \times \boldsymbol{\mathfrak{B}} = -(\boldsymbol{\mathfrak{B}} \times \boldsymbol{\mathfrak{A}});$$

das distributive Gesetz:

$$\boldsymbol{\mathfrak{A}} \cdot (\boldsymbol{\mathfrak{B}} + \boldsymbol{\mathfrak{C}}) = \boldsymbol{\mathfrak{A}} \cdot \boldsymbol{\mathfrak{B}} + \boldsymbol{\mathfrak{A}} \cdot \boldsymbol{\mathfrak{C}}, \qquad \boldsymbol{\mathfrak{A}} \times (\boldsymbol{\mathfrak{B}} + \boldsymbol{\mathfrak{C}}) = \boldsymbol{\mathfrak{A}} \times \boldsymbol{\mathfrak{B}} + \boldsymbol{\mathfrak{A}} \times \boldsymbol{\mathfrak{C}};$$

das assoziative Gesetz:

$$\lambda \boldsymbol{\mathfrak{A}} \cdot \boldsymbol{\mathfrak{B}} = \lambda (\boldsymbol{\mathfrak{A}} \cdot \boldsymbol{\mathfrak{B}}), \qquad \lambda \boldsymbol{\mathfrak{A}} \times \boldsymbol{\mathfrak{B}} = \lambda (\boldsymbol{\mathfrak{A}} \times \boldsymbol{\mathfrak{B}}).$$

Mit einem Wort: Man darf mit dem skalaren und motorischen Produkt zweier Motoren so rechnen wie mit dem skalaren und vektoriellen Produkt zweier Vektoren.

8. Invariante Darstellung und Konstruktion der Produkte. Die invarianten, d. h. von der Wahl eines willkürlichen Bezugspunktes freien, Definitionen der beiden Produkte (entsprechend denen der Vektorrechnung durch Länge, Projektion, Flächeninhalt) erscheinen hier weniger einfach, weisen aber eine bemerkenswerte Symmetrie auf. Außerdem tritt gegenüber der Vektorrechnung die merkwürdige Erscheinung zu Tage, daß die Produkte ohne Annahme einer Einheit konstruierbar sind, indem sie zu Größen derselben Dimension wie die Faktoren führen, während die Produkte in der Vektorrechnung höhere Dimension besitzen.

Wir wollen zunächst annehmen, daß die Resultantvektoren der $\boldsymbol{\mathfrak{A}}$ und $\boldsymbol{\mathfrak{B}}$ von Null verschieden sind, daß es sich also um eigentliche Motoren handelt. Wählt man einen beliebigen Bezugspunkt o auf der Achse von $\boldsymbol{\mathfrak{A}}$, so hat der Momentvektor $\mathfrak{A}_o$ die Richtung von $\mathfrak{A}$ — er ist nämlich gleich dem längs der Achse gezogenen Vektor von der Anfangs- zur Endgeraden des Motors — und kann etwa durch $a\,\mathfrak{A}$ bezeichnet werden. Die Zahl a, die wir auch die Steigung des Motors nennen wollen (entsprechend der Schraubensteigung), dazu die Größe A des Resultantvektors und die Lage der Achse bestimmen zusammen in invarianter Weise den Motor $\boldsymbol{\mathfrak{A}}$. In gleicher Weise sei der Motor $\boldsymbol{\mathfrak{B}}$ durch seine Achse, durch b und $\mathfrak{B}$ gegeben, wobei aber zu beachten ist, daß $b\,\mathfrak{B}$ der Momentvektor bezogen auf einen Punkt der Achse von $\boldsymbol{\mathfrak{B}}$ ist, so daß nach (2):

$$\mathfrak{A}_o = a\,\mathfrak{A}, \quad \mathfrak{B}_o = b\,\mathfrak{B} - (\mathfrak{B} \times \mathfrak{d}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Hier kann $\mathfrak{d}$ irgend einen von einem Punkt der ersten zu einem Punkt der zweiten Achse gezogenen Vektor bedeuten, wir wollen aber festsetzen, $\mathfrak{d}$ solle den kürzesten, also auf der gemeinsamen Normalen der beiden Achsen gezogenen Vektor bezeichnen. Werden die beiden Motoren, wie in **3**, mit gemeinsamer Anfangsgeraden O dargestellt, so ist $\mathfrak{d}$ parallel O und unser Bezugspunkt o liegt auf O.

Der Ausdruck (3) für das skalare Produkt nimmt nach (7) die Gestalt an:

$$\boldsymbol{\mathfrak{A}} \cdot \boldsymbol{\mathfrak{B}} = b\,\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} - \mathfrak{A}\,(\mathfrak{B} \times \mathfrak{d}) \times a\,\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = (a + b)\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{B} - \mathfrak{d}\,(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}) \quad . \quad (8),$$

während die Komponenten des Motorproduktes nach (4) werden:

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}, \; \mathfrak{P}_o = b(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}) - \mathfrak{A} \times (\mathfrak{B} \times \mathfrak{d}) + a(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}) = (a + b)\,(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}) + \mathfrak{d}\,(\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}) \quad (9).$$

Das skalare Produkt der Motoren $\boldsymbol{\mathfrak{A}}$ und $\boldsymbol{\mathfrak{B}}$ ist nach (8) gleich der Summe der Steigungen mal dem skalaren Produkt der Resultantvektoren vermindert um das skalare Dreifachprodukt aus den beiden Resultantvektoren und dem kürzesten Abstand der Achsen. Wichtiger und anschaulich ist diese Folgerung aus (8): Das skalare Produkt zweier Motoren verschwindet bei beliebigen Werten von a, b, A, B dann und nur dann, wenn die beiden Achsen sich rechtwinklig schneiden — weil dann $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B} = 0$, $\mathfrak{d} = o$. Von diesem und dem Fall des Verschwindens eines Faktors abgesehen, verschwindet das skalare Produkt $\boldsymbol{\mathfrak{A}} \cdot \boldsymbol{\mathfrak{B}}$ auch dann, wenn $a + b = d \operatorname{tg} (\boldsymbol{\mathfrak{A}}, \boldsymbol{\mathfrak{B}})$ wo $\boldsymbol{\mathfrak{A}}, \boldsymbol{\mathfrak{B}}$ den Winkel zwischen den Motorachsen bezeichnet.

Die Gl. (9) zeigen zunächst, daß die Achse des Produktmotors $\mathfrak{P}$ die gemeinsame Normale O der Achsen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ist. Denn sowohl $\mathfrak{P}$ wie $\mathfrak{P}_o$ hat die Richtung von O. Nehmen wir an, $\mathfrak{P}$ habe nicht etwa die Länge 0, so erhalten wir die Steigung p des Produktmotors als Quotient $\mathfrak{P}_o : \mathfrak{P} = a + b + d \operatorname{ctg} (\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$. Danach kann man die Definition von $\mathfrak{P}$ leicht in Worte fassen. Man erkennt auch, daß der Produktmotor bei beliebigen a, b, A und B dann und nur dann verschwindet, wenn die Achsen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zusammenfallen — weil dann $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = 0$, $\mathfrak{d} = 0$.

Wird ein Motor durch ein Geradenpaar dargestellt, so erscheint sein Resultantvektor als unbenannte Zahl (Winkeltangente), der Momentvektor als Länge. Die Gleichungen (3) und (4) oder (8) und (9) lassen erkennen, daß das skalare Produkt zweier Motoren eine Länge ist, das motorische Produkt ein Motor von der gleichen Dimension wie jeder Faktor. Daraus folgt, daß man die Produkte, wie schon erwähnt, konstruieren kann ohne eine besondere Einheitslänge od. dgl. wählen zu müssen. Wier geben hier zunächst die charakteristische Konstruktion für den Momentvektor $\mathfrak{P}_o$ des Motorproduktes.

Seien in Abb. 9 durch die Geradenpaare $O\,A$ und $O\,B$ die Motoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ dargestellt, so daß O die gemeinsame Normale ihrer Achsen, zugleich die Achse des Motorproduktes $\mathfrak{P}$ ist. Wenn wir für irgend zwei Punkte a, b, die als Anfangspunkt und Endpunkt den Vektor $\mathfrak{r}$ bestimmen, die Momente $\mathfrak{A}_a$ und $\mathfrak{A}_b$ bilden, so ist nach (2) $\mathfrak{A}_b - \mathfrak{A}_a = \mathfrak{A} \times \mathfrak{r}$. Danach kann man das in (4) auftretende Produkt $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}_o$ konstruieren, indem man o und b so wählt, daß $o\,b$ den Momentvektor $\mathfrak{B}_o$ darstellt. Wir wählen also, ähnlich wie in Abb. 5, die Punkte a und b auf A und B in einer Lotebene zu O, fällen von b die Lotebene auf A, die O in a_1 trifft, von a die Lotebene auf B, die O in b_1 trifft, dann stellt $a_1\,b_1$ den gesuchten Vektor $\mathfrak{P}_o$ dar. Denn es ist, wenn o den Schnitt von O mit der Lotebene zu O durch a und b bezeichnet:

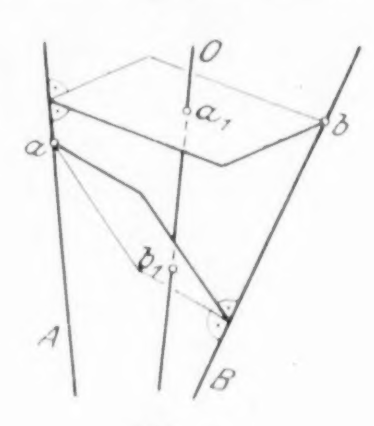


Abb. 9

$$\overline{o\,a} = \mathfrak{A}_o, \; \overline{o\,b} = \mathfrak{B}_o; \; \overline{a_1\,a} = \mathfrak{A}_b, \; \overline{b_1\,b} = \mathfrak{B}_a;$$
$$\overline{o\,a_1} = \mathfrak{A}_o - \mathfrak{A}_b = -\mathfrak{A} \times \overline{o\,b} = \mathfrak{B}_o \times \mathfrak{A}, \; \overline{o\,b_1} = \mathfrak{B}_o - \mathfrak{B}_a = -\mathfrak{B} \times \overline{o\,a} = \mathfrak{A}_o \times \mathfrak{B}$$

und daher wirklich $\mathfrak{P}_o = \overline{o\,b_1} - \overline{o\,a_1} = \overline{a_1\,b_1}$. Der Umstand, daß $\mathfrak{P}_o$ von der Wahl des Punktes o auf O unabhängig ist, liefert einen einfachen stereometrischen Satz [1]).

Vom Produktmotor $\mathfrak{P}$ kennt man nun die Lage der Achse und den Momentvektor für ihre Punkte. Die Größe des Resultantvektors hängt nur von den Richtungen O, A, B ab. Trägt man drei Parallele hierzu von einem festen Punkt aus auf, schneidet sie durch eine Lotebene zu O im Abstand c vom Anfangspunkt, so liefert die doppelte Fläche des Schnittpunktdreiecks $o\,a\,b$ das c^2-fache der gesuchten Größe, die danach leicht als Winkel-Tangente zu konstruieren ist (flächengleiches Dreieck mit c als Kathete).

Die Größe des skalaren Produktes von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ kann man als Länge auf o konstruieren, indem man die Konstruktion von $\mathfrak{P}_o$ etwas verändert: Da man hier die Produkte $A\,B_o \cos (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_o)$ und $A_o\,B \cos (\mathfrak{A}_o, \mathfrak{B})$ an Stelle der analogen mit den sinus der Winkel braucht, so muß man nur entsprechende Drehungen durch 90^0 vornehmen.

9. Mehrfache Produkte, Rechenregeln. Völlig analog der Vektorrechnung gestaltet sich die Vertauschungsregel für die Zusammensetzung aus einem skalaren und einem motorischen Produkt. Es seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ drei beliebige Motoren, dann gilt

$$\mathfrak{A} \cdot (\mathfrak{B} \times \mathfrak{C}) = \mathfrak{B} \cdot (\mathfrak{C} \times \mathfrak{A}) = \mathfrak{C} \cdot (\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

Der Beweis folgt aus den Definitionen (3) und (4), sobald man den bekannten Vertauschungssatz der Vektorrechnung zuhilfe nimmt. Denn das erste Produkt in (10) ist nach (3) und (4) gleich

$$\mathfrak{A}\,(\mathfrak{B} \times \mathfrak{C}_o) + \mathfrak{A}\,(\mathfrak{B}_o \times \mathfrak{C}) + \mathfrak{A}_o\,(\mathfrak{B} \times \mathfrak{C})$$

und hier darf in jedem Summanden die Reihenfolge der Faktoren zyklisch vertauscht werden, womit (10) bewiesen ist.

Die Vertauschbarkeit geht auch unmittelbar hervor aus der Darstellung in skalaren Komponenten. Es ist definitionsgemäß

$$\mathfrak{A} \cdot (\mathfrak{B} \times \mathfrak{C}) = \begin{vmatrix} A_4 & A_5 & A_6 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_4 & B_5 & B_6 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_4 & C_5 & C_6 \end{vmatrix} \quad . \; . \; . \quad (10').$$

[1]) Vgl. die von mir gestellte Aufgabe in Jahresber. d. dtsch. Mathematiker-Verein 31, 1922, S. 65.

Die drei Determinanten entstehen, indem man in der Matrix der neun Komponenten von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ jedesmal eine Zeile durch die Komponenten von $\mathfrak{A}_o$, $\mathfrak{B}_o$, $\mathfrak{C}_o$ ersetzt.

Nicht so einfach ist die Zerlegung des dreifachen Produktes, das durch Wiederholung der motorischen Multiplikation entsteht, in zwei Summanden. Man hat nach (3) und (4) für

$$\boldsymbol{\mathfrak{P}} = \boldsymbol{\mathfrak{A}} \times (\boldsymbol{\mathfrak{B}} \times \boldsymbol{\mathfrak{C}}), \quad \mathfrak{P} = \mathfrak{A} \times (\mathfrak{B} \times \mathfrak{C}), \quad \mathfrak{P}_o = \mathfrak{A} \times (\mathfrak{B} \times \mathfrak{C}_o) \times \mathfrak{A} \times (\mathfrak{B}_o \times \mathfrak{C}) + \mathfrak{A}_o \times (\mathfrak{B} \times \mathfrak{C}) \quad (11).$$

Wendet man hier den Entwicklungssatz des dreifachen Produktes der Vektorrechnung an, nämlich

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{A} \times (\mathfrak{B} \times \mathfrak{C}) = \mathfrak{B}\,(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{C}) - \mathfrak{C}\,(\mathfrak{A} . \mathfrak{B}),$$

so erkennt man, daß sich $\boldsymbol{\mathfrak{P}}$ tatsächlich als Differenz zweier Motoren darstellen läßt, $\boldsymbol{\mathfrak{P}} = \boldsymbol{\mathfrak{K}} - \boldsymbol{\mathfrak{L}}$, mit

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{K} = \mathfrak{B}\,(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{C}), \quad \mathfrak{K}_o = \mathfrak{B}_o\,(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{C}) + \mathfrak{B}\,(\boldsymbol{\mathfrak{A}} \cdot \boldsymbol{\mathfrak{C}}) \\ \mathfrak{L} = \mathfrak{C}\,(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}), \quad \mathfrak{L}_o = \mathfrak{C}_o\,(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}) + \mathfrak{C}\,(\boldsymbol{\mathfrak{A}} \cdot \boldsymbol{\mathfrak{B}}) \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (12),$$

aber die Bestandteile $\boldsymbol{\mathfrak{K}}$ und $\boldsymbol{\mathfrak{L}}$ sind nicht unmittelbar als Produktgrößen aus den Motoren $\boldsymbol{\mathfrak{A}}$, $\boldsymbol{\mathfrak{B}}$, $\boldsymbol{\mathfrak{C}}$ ausdrückbar.

Diese kleine Abweichung macht sich nicht mehr geltend, sobald man die drei ternären Produkte betrachtet, die aus (11) durch cyklische Vertauschung der Faktoren hervorgehen. Analog der Vektorformel $\mathfrak{a} \times (\mathfrak{b} \times \mathfrak{c}) + \mathfrak{b} \times (\mathfrak{c} \times \mathfrak{a}) + \mathfrak{c} \times (\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}) = 0$ gilt:

$$\boldsymbol{\mathfrak{A}} \times (\boldsymbol{\mathfrak{B}} \times \boldsymbol{\mathfrak{C}}) + \boldsymbol{\mathfrak{B}} \times (\boldsymbol{\mathfrak{C}} \times \boldsymbol{\mathfrak{A}}) + \boldsymbol{\mathfrak{C}} \times (\boldsymbol{\mathfrak{A}} \times \boldsymbol{\mathfrak{B}}) = 0 \quad \ldots \quad (13).$$

Man erhält (13), indem man jeden der drei Summanden gemäß (12) entwickelt.

Eine bemerkenswerte Symmetrie weist das vierfache Produkt auf, das durch skalare Multiplikation zweier motorischer Produkte entsteht. Wendet man auf

$$Q = (\boldsymbol{\mathfrak{A}} \times \boldsymbol{\mathfrak{B}}) \cdot (\boldsymbol{\mathfrak{C}} \times \boldsymbol{\mathfrak{D}}) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

zuerst die Vertauschungsformel (10) an, indem man $\boldsymbol{\mathfrak{C}}$ heraushebt, so bleibt als zweiter Faktor $\boldsymbol{\mathfrak{D}} \times (\boldsymbol{\mathfrak{A}} \times \boldsymbol{\mathfrak{B}})$ und auf diesen läßt sich die Entwicklungsformel (12) anwenden. So erhät man

$$Q = (\mathfrak{B}\,\mathfrak{D})\,(\boldsymbol{\mathfrak{A}}\,\boldsymbol{\mathfrak{C}}) + (\mathfrak{A}\,\mathfrak{C})\,(\boldsymbol{\mathfrak{B}}\,\boldsymbol{\mathfrak{D}}) - (\mathfrak{A}\,\mathfrak{D})\,(\boldsymbol{\mathfrak{B}}\,\boldsymbol{\mathfrak{C}}) - (\mathfrak{B}\,\mathfrak{C})\,(\boldsymbol{\mathfrak{A}}\,\boldsymbol{\mathfrak{D}}) \quad \ldots \quad (15).$$

Diese Gleichung tritt anstelle der Vektorformel

$$(\mathfrak{a} \times \mathfrak{b})\,(\mathfrak{c} \times \mathfrak{d}) = (\mathfrak{a}\,\mathfrak{c})\,(\mathfrak{b}\,\mathfrak{d}) - (\mathfrak{a}\,\mathfrak{d})\,(\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}),$$

die bekanntlich in analoger Weise abgeleitet wird.

10. Einfache geometrische Anwendungen. Ein Motor $\boldsymbol{\mathfrak{A}}$, der durch zwei sich schneidende Gerade dargestellt wird, ist analytisch dadurch gekennzeichnet, daß sein Momentvektor für den Schnittpunkt der Geraden und dann für alle Punkte seiner Achse verschwindet. Für einen beliebigen Bezugspunkt o ist daher nach (1) das Moment $\mathfrak{A}_o$ senkrecht auf $\mathfrak{A}$, d. h. es besteht zwischen den 6 skalaren Komponenten die unter dem Namen der Plückerschen Relation bekannte Gleichung

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}_o = A_1 A_4 + A_2 A_5 + A_3 A_6 = 0 \quad \ldots \ldots \quad (16).$$

(Der mittlere Gleichungsausdruck ist übrigens das halbe skalare Produkt des Motors mit sich selbst, daher eine Invariante des Motors $\boldsymbol{\mathfrak{A}}$.) Einen solchen speziellen Motor nennt Study einen »Rotor«; er entspricht in der Dynamik einer Einzelkraft, in der Kinematik einer reinen Rotation. Durch die Verhältnisse der sechs Komponenten A_1 bis A_6 wird, wofern sie der Gl. (16) genügen und nicht A_1, A_2, A_3 zugleich verschwinden, eine gerade Linie im Raum der Lage nach bestimmt, eben die Achse des Motors $\boldsymbol{\mathfrak{A}}$. Die Rotorkomponenten sind demnach nichts anderes als die Plückerschen Koordinaten der Achse.

Ein Motor, der durch zwei parallele Gerade dargestellt wird, besitzt das analytische Kennzeichen, daß seine Resultantkomponente verschwindet, also $A_1 = A_2 = A_3 = o$ ist. Die Momentkomponente ist dann nach (1) für alle Bezugspunkte gleich, der Motor durch die drei skalaren Zahlen A_4, A_5, A_6 vollständig gegeben. Einen solchen Motor nennt Study einen »Translator«; er entspricht in der Dynamik einem Kräftepaar, in der Kinematik einer reinen Translation. Die Verhältnisse der A_4, A_5, A_6 bestimmen natürlich nur eine Richtung.

Es empfiehlt sich, analog den Einheitsvektoren der Vektorrechnung den Begriff des »Einheitsmotors« einzuführen. Wir wollen als Einheitsmotoren bezeichnen 1) alle Motoren, für die $A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = 1$, also der Resultantvektor die Länge 1 hat, 2) alle Motoren, für die $A_1 = A_2 = A_3 = o$ und $A_4^2 + A_5^2 + A_6^2 = 1$, d. s. die Translatoren, deren Momentvektor die Länge 1 besitzt. Von diesem Begriff werden wir später noch ausgiebig Gebrauch machen.

Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei Rotoren, so daß also

$$A_1 A_4 + A_2 A_5 + A_3 A_6 = 0, \; B_1 B_4 + B_2 B_5 + B_3 B_6 = 0 \; . \; . \; . \; (17).$$

Die zweimal sechs Zahlen $A_1 \ldots A_6$ und $B_1 \ldots B_6$ oder eigentlich ihre Verhältnisse bestimmen, wie oben gezeigt, zwei Gerade A, B. Diese bestimmen, wofern sie nicht aufeinander senkrecht stehen, wieder als Anfangs- und Endgerade einen Motor $\mathfrak{M}$, und es muß daher möglich sein, dieses $\mathfrak{M}$ aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zu berechnen. Man kann sehen, daß

$$\mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}}{\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (18)$$

gilt. Denn der durch (18) definierte Motor hat nach der Definition in **7** die gemeinsame Normale von A und B zur Achse und den Resultantvektor $(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}) : (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B})$, dessen Länge demnach $\operatorname{tg}(A, B)$ ist. Die zweite Vektorkomponente von $\mathfrak{M}$ für einen Punkt der Achse als Bezugspunkt ist nach (9), da jetzt $a = b = 0$ für die Rotoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gilt, gleich $\mathfrak{d}(\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}) : (\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}) = \mathfrak{d}$, womit die Behauptung erwiesen ist. Die sechs Komponentengleichungen von (18):

$$\left.\begin{array}{l} M_1 = A_2 B_3 - A_3 B_2, \; M_2 = A_3 B_1 - A_1 B_3 \ldots . \\ M_4 = A_5 B_3 - A_6 B_2 + A_2 B_6 - A_3 B_5, \; M_5 = A_6 B_1 - A_4 B_3 + A_3 B_4 - A_1 B_6 \ldots . \end{array}\right\} \; (19)$$

liefern die Komponenten eines Motors ausgedückt durch die Plückerschen Koordinaten des ihn darstellenden Geradenpaares.

Gibt man den $M_1 \ldots M_6$ in (19) feste Werte, so bestimmen die Gl. (19) zusammen mit (17) alle Geradenpaare, die durch Schraubung um ihre Achse ineinander überführbar sind. In dieser Weise kann man durch Motorgleichungen und ihre Komponenten-Zerlegung verschiedene Geraden-Oerter darstellen und überhaupt die Motoranalysis in einer Geometrie, deren Element die gerade Linie ist, ähnlich verwenden wie die Vektoranalysis in der gewöhnlichen Punkt-Geometrie. Doch soll hier darauf nicht weiter eingegangen werden.

II. Motorrechnung der zweiten Stufe (Motor-Dyaden).

1. Vektor und Vektor-Dyade. Im ersten Abschnitt haben wir eine geometrische Definition des Vektors gegeben und eine analytische in Aussicht gestellt. Wenden wir uns jetzt dieser zu, so müssen wir naturgemäß von dem Begriff der Vektorkomponanten ausgehen, die den Richtungen des Raumes zugeordnet sind. Es genügt aber nicht, wie schon erwähnt, zu erklären, ein Vektor sei ein Zahlentripel, das auf ein bestimmtes Achsenkreuz bezogen ist. Die beiden Anzahlen von Spaziergängern, die an einer rechtwinkligen Straßenkreuzung in der einen und in der anderen Linie sich bewegen, bestimmen gewiß keinen ebenen Vektor. Das Entscheidende und analytisch Wesentliche für den Vektor ist, daß jeder Richtung eine gewisse Zahl, der »Wert« des Vektors für diese Richtung, zugeordnet ist und daß die Gesamtheit dieser Zahlen einer bestimmten Gesetzmäßigkeit genügt. Wird eine Raumrichtung ν durch die drei Richtungskosinus $\cos(\nu, x)$, $\cos(\nu, y)$, $\cos(\nu, z)$ festgelegt, so kann man einen Ausdruck der Form $v_\nu = a\cos(\nu, x) + b\cos(\nu, y) + c\cos(\nu, z)$, worin a, b, c Konstante sind, eine lineare Richtungsfunktion nennen. Wählt man ein neues Bezugssystem mit den Achsen x', y', z', so geht der eben betrachtete lineare Ausdruck, wie man leicht erkennt, wieder in einen solchen über, etwa in $v_\nu = a'\cos(\nu, x') + b'\cos(\nu, y') + c'\cos(\nu, z')$. Dabei bedeuten die a, b, c die Werte der Funktion für die Richtungen der x- bezw. y- bezw. z-Achse, sind also sinngemäß mit v_x, v_y, v_z zu bezeichnen (da z. B. mit $\nu = x$ der erste cos gleich 1, die anderen gleich Null werden usf.), die a', b', c' die Werte für die x'- bezw. y'- bezw. z'-Achse. Wir gelangen, so zu der folgenden analytischen Definition eines Vektors: Unter einem Vektor $\mathfrak{v}$ verstehen wir den Inbegriff der den Richtungen des Raumes nach einem bestimmten linearen Gesetz

$$v_\nu = v_x \cos(\nu, x) + v_y \cos(\nu, y) + v_z \cos(\nu, z) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

zugeordneten skalaren Zahlen v_ν. Der Vektor ist darnach durch die drei Zahlen v_x, v_y, v_z, seine »Werte« für die Koordinatenrichtungen, bestimmt. Man berechnet leicht aus (1), daß v_ν den Größtwert $\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ besitzt, diesen für die Richtung ν annimmt, die durch $\cos(\nu, x) : \cos(\nu, y) : \cos(\nu, z) = v_x : v_y : v_z$ gegeben ist, endlich daß für alle dazu senkrechten Richtungen v_ν verschwindet. Indem man die Größe des Maximums und seine Richtung als Bestimmungsstücke nimmt (also nur das Bezugssystem entsprechend wählt), gewinnt man den Anschluß an die geometrische Vektordefinition.

Die Art, in der ein Vektor in der Mechanik oder Physik auftritt, entspricht durchaus unserer Definition. Wenn wir sagen, die Geschwindigkeit eines Punktes sei ein Vektor, so beruht dies darauf, daß ein bewegter Punkt in jeder Richtung des Raumes einen gewissen Fortschritt pro Zeiteinheit aufweist und daß alle diese Größen in dem durch (1) dargestellten Zusammenhang stehen. Noch deutlicher wird das, wenn wir die Aussage betrachten: Die erste Ableitung einer skalaren Raumfunktion $f(x, y, z)$ sei ein Vektor (Gradient). In der Tat wird jeder Richtung nach den Regeln der Differentialrechnung eine Zahl, die »Ableitung nach dieser Richtung«, zugeordnet und die Gesamtheit aller dieser Zahlen wird durch drei von ihnen nach (1) bestimmt.

Nunmehr ist es ein Leichtes, das Vektorgebilde zweiter und höherer Stufe einzuführen. Es gibt in der Mechanik und Physik auch Fälle, in denen jeder Raumrichtung nicht eine skalare Zahl, sondern ein Vektor zugeordnet ist. Beispielsweise entspricht in jedem Punkt im Innern eines Körpers jeder Schnittrichtung ν ein Spannungsvektor $\mathfrak{p}_\nu$, nämlich die Spannung für das Flächenelement senkrecht zu ν. Aus bekannten Gleichgewichtssätzen leitet man ab, daß die unendlich vielen Spannungsvektoren in einem Punkt keineswegs voneinander unabhängig sind, sondern in einer Beziehung stehen, die man wieder als »linear« bezeichnen muß. Es drückt sich nämlich $\mathfrak{p}_\nu$ in der Form $\mathfrak{a} \cos(\nu, x) + \mathfrak{b} \cos(\nu, y) + \mathfrak{c} \cos(\nu, z)$ aus, wo $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ konstante Vektoren sind, natürlich gleich den Werten von $\mathfrak{p}_\nu$ für die x-, y- bezw. z-Richtung. Die Gesamtheit der Spannungsvektoren in einem Punkte bildet ein solches Gebilde »zweiter Stufe«, einen Tensor oder eine Vektor-Dyade. Wir definieren in vollständiger Analogie zu der analytischen Definition eines Vektors: Unter einem Tensor oder einer Vektor-Dyade Π verstehen wir den Inbegriff der den Richtungen des Raumes nach einem bestimmten linearen Gesetz

$$\mathfrak{p}_\nu = \mathfrak{p}_x \cos(\nu, x) + \mathfrak{p}_y \cos(\nu, y) + \mathfrak{p}_z (\nu, z \quad \ldots \ldots \quad (2),$$

zugeordneten Vektoren. Es ist ohne weiteres klar, daß das Gebilde dritter Stufe oder die Vektor-Triade in ganz gleicher Weise als Inbegriff von den Richtungen ν linear zugeordneten Dyaden erscheint usf.

Das anschaulichste und einfachste Beispiel für die Vektorgebilde höherer Stufe liefert die fortgesetzte Differentiation einer Raumfunktion. Wir haben oben erwähnt, daß und in welchem Sinn die erste Ableitung einer skalaren Funktion $f(x, y, z)$ ein Vektor ist. Differenziert man einen als Funktion des Ortes gegebenen Vektor nach irgend einer Richtung, so erhält man wieder einen Vektor; die Gesamtheit der Vektoren, die die Ableitungen nach allen Raumrichtungen bilden, genügt (nach dem Satz vom »totalen« Differentiale) einer Beziehung der Form (2), ist also eine Dyade. Die zweite Ableitung eines Vektors, die dritte eines Skalars oder die erste einer Dyade wird ganz analog durch eine Gesamtheit von Dyaden dargestellt, die einem linearen Gesetz folgen, ist also eine Triade usf. Jedesmalige Differentiation erhöht die Stufe des Gebildes um eine Einheit.

2. Die Motor-Dyade. Um den Dyaden-Begriff (oder den der Gebilde höherer Stufe überhaupt) aus der Vektorrechnung in die Motorrechnung zu übertragen, müssen wir nur an Stelle der »Richtung«, die ja durch einen Einheitsvektor dargestellt wird, den »Einheitsmotor« treten lassen. Wir haben in I, **10** als Einheitsmotor $\mathfrak{E}$ einen solchen definiert[1]), für dessen Komponenten $E_1, E_2 \ldots E_6$

$$\text{entweder} \quad E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 = 1 \quad \text{oder} \quad E_1 = E_2 = E_3 = 0, \; E_4^2 + E_5^2 + E_6^2 = 1 \quad . \quad (3)$$

gilt. Die invariante Bedeutung der Einheitsmotoren ist schon oben erklärt worden. Je nachdem die erste oder die zweite der Alternativen (3) besteht, wollen wir vom Einheitsmotor erster oder zweiter Art sprechen.

Ist nun ein beliebiger Motor $\mathfrak{M}$ durch seine Komponenten $M_1, M_2 \ldots M_6$ gegeben, so kann man — immer in Analogie zur Vektorrechnung — als seinen »Wert für den Einheitsmotor $\mathfrak{E}$« das skalare Produkt $\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{E} = M_4 E_1 + M_5 E_2 + M_6 E_3 + M_1 E_4 + M_2 E_5 + M_3 E_6$ definieren. Umgekehrt, wenn etwa der Begriff des Einheitsmotors, aber nicht der eines beliebigen Motors festliegt, kann man erklären: Unter einem Motor $\mathfrak{M}$ verstehen wir den Inbegriff der den Einheitsmotoren des Raumes nach einem bestimmten linearen Gesetz

$$M_{\mathfrak{E}} = M_4 E_1 + M_5 E_2 + M_6 E_3 + M_1 E_4 + M_2 E_5 + M_3 E_6 \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

[1]) Für den jetzt in Frage kommenden Zweck könnten wir auch in verschiedener anderer Weise eine Mannigfaltigkeit von ∞^5 Motoren herausheben.

zugeordneten skalaren Zahlen $M_\mathfrak{E}$. Ist ein Koordinatensystem gewählt, so ist der Motor durch die 6 Zahlen M_1 bis M_6 bestimmt. Daß dieser Definition kein unmittelbar praktischer Wert zukommt, liegt nur daran, daß für den Einheitsmotor kein so einfaches und anschauliches geometrisches Gebilde eintritt wie die Raumrichtung für den Einheitsvektor.

Allein die eben formulierte »analytische« Motor-Definition gibt uns die Möglichkeit an die Hand, den Begriff der Motor-Dyade ohne weitere Schwierigkeit zu gewinnen. Nehmen wir an, es seien statt der sechs skalaren Zahlen $M_1, M_2 \ldots M_6$, die einen Motor $\mathfrak{M}$ festlegen, jetzt sechs beliebige Motoren $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2 \ldots \mathfrak{P}_6$ gegeben. Wir definieren: Unter einer Motor-Dyade $\mathbf{\Pi}$ verstehen wir den Inbegriff der den Einheitsmotoren des Raumes nach einem bestimmten linearen Gesetz

$$\mathfrak{P}_\mathfrak{E} = \mathfrak{P}_4 E_1 + \mathfrak{P}_5 E_2 + \mathfrak{P}_6 E_3 + \mathfrak{P}_1 E_4 + \mathfrak{P}_2 E_5 + \mathfrak{P}_3 E_6 \quad \ldots \quad (5)$$

zugeordneten Motoren $\mathfrak{P}_\mathfrak{E}$. Die Motor-Dyade ist demnach durch 6 Motoren oder durch 12 Vektoren oder durch 36 Skalare bestimmt. Wir wollen die Vektorkomponenten von $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2 \ldots$ mit $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_{1o}; \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_{2o} \ldots$ bezeichnen, die Skalarkomponenten mit $P_{11}, P_{12} \ldots P_{16}; P_{21}, P_{22} \ldots P_{26}; \ldots$ Wenn wir die Dyade $\mathbf{\Pi}$ durch ihre Skalarkomponenten darstellen wollen, ordnen wir sie in einem quadratischen Schema wie folgt an:

$$\left\{ \begin{matrix} P_{11}\ P_{12} \ldots P_{16} \\ P_{21}\ P_{22} \ldots P_{26} \\ \cdots\cdots\cdots \\ P_{61}\ P_{62} \ldots P_{66} \end{matrix} \right\} \quad \ldots \quad (6)$$

Diese quadratische Matrix von der Zeilen- und Spaltenlänge 6 zerfällt in 4 Quadrate von der Zeilen- und Spaltenlänge 3; diese stellen gewöhnliche Vektor-Dyaden dar, die wir der Reihe nach mit $\Pi_{11}, \Pi_{12}, \Pi_{21}, \Pi_{22}$ bezeichnen wollen, sodaß zur Abkürzung von (6) mitunter auch

$$\left\{ \begin{matrix} \Pi_{11}\ \Pi_{12} \\ \Pi_{21}\ \Pi_{22} \end{matrix} \right\} \quad \ldots \quad (6')$$

geschrieben werden soll.

Der Mangel einer unmittelbar anschaulichen Deutung des Einheitsmotors macht sich auch bei der Definition der Motor-Dyade fühlbar. Da nämlich nach I, **10** jeder Motor als skalares Vielfaches eines Einheitsmotors erscheint, sieht man nicht recht ein, warum in der Definition (5) gerade die Einheitsmotoren benutzt werden; man könnte ebenso gut auch von linearen Funktionen irgendwelcher Motoren sprechen. Es ist aber für die einheitliche und eindeutige Auffassung der Komponenten Schemata (6) und (6′) besser, bei unserer Definition zu bleiben. Wir wollen jetzt, ehe wir weiter gehen, an einem bestimmten und sehr wichtigen Beispiel die Verwendung des neu gewonnenen Begriffs der Motor-Dyade in der Mechanik dartun.

3. Die Trägheits-Dyade. Die Trägheit eines bewegten Punktes wird bekanntlich durch eine einzige skalare Zahl, die »Masse« m, beschrieben, die Trägheit eines starren Körpers erfordert zu ihrer vollständigen Beschreibung noch weiterer Angaben: der Lage des Schwerpunktes, der Größe der Zentrifugal- und Deviationsmomente. Wir werden nun zeigen, daß alle diese Größen die Elemente einer einzigen motorischen Dyade bilden, in der demnach die gesamten Trägheits-Eigenschaften eines Körpers zum Ausdruck kommen.

Sei $\mathfrak{V}$ der Geschwindigkeitsvektor eines Massenelementes dm, dessen Lage in bezug auf einen festen Anfangspunkt o durch den Ortsvektor $\mathfrak{r}$ bestimmt wird. Das Produkt $\mathfrak{V}dm$ heißt dann die Bewegungsgröße oder der Impuls von dm und $\mathfrak{r} \times \mathfrak{V}dm$ das Moment der Bewegungsgröße oder Impulsmoment. Indem wir $\mathfrak{V}$ an den Punkt $\mathfrak{r}$ oder wenigstens an die durch den Punkt hindurchgehende Gerade in der Richtung von $\mathfrak{V}$ gebunden denken, den Vektor an den Punkt »anheften«, gelangen wir zu der Auffassung des Impulses als »Stab« oder als spezieller Motor (»Rotor«); sein Resultantvektor ist $\mathfrak{V}dm$, seine zweite Vektorkomponente in bezug auf o ist $\mathfrak{r} \times \mathfrak{V}dm$. Die Addition der Impulse für alle Teile des Körpers liefert einen Impulsmotor $\mathfrak{T}$ mit den Vektorkomponenten

$$\mathfrak{T} = \int \mathfrak{V}dm, \qquad \mathfrak{T}_o = \int \mathfrak{r} \times \mathfrak{V}dm \quad \ldots \quad (7).$$

Hierbei ist vorausgesetzt, daß die Verteilung der Massen stetig ist; liegen nur diskrete Massenpunkte vor, so treten anstelle der Integrale in (7) entsprechende Summenausdrücke.

Der gesamte Geschwindigkeitszustand eines starren Körpers wird durch einen Motor beschrieben. Nehmen wir an, dieser sei ein Einheitsmotor $\mathfrak{E}$, so ist die Geschwindigkeit $\mathfrak{V}$ im Punkte $\mathfrak{r}$ das Moment von $\mathfrak{E}$, also nach I (1):

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{E}_o + (\mathfrak{E} \times \mathfrak{r}) \quad \text{. . . . . (8).}$$

Durch (7) und (8) ist offenbar eine Zuordnung von Motoren $\mathfrak{T}$ an die sämtlichen Einheitsmotoren definiert. Diese Zuordnung ist sicher eine **lineare**; denn wenn wir (8) in (7) einführen, erscheinen die Komponenten von $\mathfrak{E}$ immer nur mit Ausdrücken, die $\mathfrak{r}$ und m enthalten, multipliziert. Es liegt somit hier eine Motor-Dyade vor, die wir die **Trägheits-Dyade** T des Körpers nennen und deren Komponenten-Matrix wir sofort berechnen wollen.

In die erste Zeile des quadratischen Schemas kommen nach dem Vorangehenden die sechs Komponenten des Motors $\mathfrak{T}_1$, der, wie (5) zeigt, demjenigen Einheitsmotor $\mathfrak{E}$ zugeordnet ist, für den alle Komponenten außer E_4 verschwinden, E_4 aber gleich 1 wird. Die Vektorkomponenten dieses Einheitsmotors sind $\mathfrak{E} = o$ und $\mathfrak{E}_o = \mathfrak{i}$, wenn wir in üblicher Weise mit $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ die Einheitsvektoren in den drei Richtungen des Koordinatenkreuzes bezeichnen. Nach (8) ist für den betrachteten Fall die Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes unabhängig von $\mathfrak{r}$, und zwar $\mathfrak{V} = \mathfrak{i}$. Setzt man dies in (7) ein und schreibt x, y, z für die Komponenten von $\mathfrak{r}$, so erhält man für die beiden Vektorkomponenten von $\mathfrak{T}_1$ die Ausdrücke $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{i}\int dm$, $\mathfrak{T}_{1o} = \int \mathfrak{r} \times \mathfrak{i}\, dm$, also für die sechs Skalarkomponenten $T_{11} = \int dm$, $T_{12} = T_{13} = 0$, $T_{14} = 0$, $T_{15} = \int z\, dm$, $T_{16} = -\int y\, dm$. Nennen wir die Gesamtmassse des Körpers m, die Schwerpunktkoordinaten x^*, y^*, z^*, so ergibt sich sonach als erste Zeile des (6) entsprechenden Schemas von T:

$$m,\ 0,\ 0,\ 0,\ mz^*,\ -my^* \quad \text{. . . . . (9).}$$

In ganz gleicher Weise kann man die zweite und dritte Zeile berechnen, die durch gewisse Vertauschungen aus (9) entstehen, nämlich

$$0,\ m,\ 0,\ -mz^*,\ 0,\ mx^* \quad \text{und} \quad 0,\ 0,\ m,\ my^*,\ -mx^*,\ 0 \quad \text{. . . (9').}$$

Um nun die vierte (und dann die beiden letzten) Zeilen zu erhalten, müssen wir nach (5) für $\mathfrak{E}$ zunächst denjenigen Einheitsmotor wählen, der durch $E_1 = 1$, $E_2 = E_3 = \ldots E_6 = 0$ gekennzeichnet wird, für den also $\mathfrak{E} = \mathfrak{i}$, $\mathfrak{E}_o = 0$ ist. Es folgt aus (8), daß dann $\mathfrak{V} = \mathfrak{i} \times \mathfrak{r}$ mit den Komponenten $V_1 = 0$, $V_2 = -z$, $V_3 = y$ wird. Einsetzen in (7) liefert die ersten drei Komponenten von $\mathfrak{P}_4$, daß ist die Komponenten $\int \mathfrak{V}\, dm$, gleich 0, $-\int z\, dm = -mz^*$ und $\int y\, dm = my^*$; die drei letzten Komponenten sind die des zweiten Ausdrucks (7), also zuerst $\int (y V_3 - z V_2)\, dm = \int (y^2 + z^2)\, dm$, sodann $\int (z V_1 - x V_3)\, dm = -\int x y\, dm$, endlich $\int (x V_2 - y V_1)\, dm = -\int x z\, dm$. Man sieht, wie hier die Trägheits- und Deviationsmomente auftreten, für die wir auch die Abkürzungen J_1, J_2, J_3 bezw. D_1, D_2, D_3 gebrauchen wollen. Die vierte Zeile des gesuchten Schemas lautet demnach

$$0,\ -mz^*,\ my^*,\ J_1,\ -D_3,\ -D_2 \quad \text{. . . . . (9'').}$$

Die beiden letzten Zeilen ergeben sich durch die gleiche Betrachtung, bezw. durch entsprechende Vertauschungen zu

$$mz^*,\ 0,\ -mx^*,\ -D_3,\ J_2,\ -D_1 \quad \text{und} \quad -my^*,\ mx^*,\ 0,\ -D_2,\ -D_1,\ J_3 \quad \text{(9''').}$$

Wenn man anstelle der Schwerpunktskoordinaten x^*, y^*, z^* die statischen Momente einführt und — in Zusammenhang mit den schon eingeführten Abkürznngen — setzt:

$$\begin{aligned} &\int dm = m, && \int x\, dm = x^* m = S_1, && \int y\, dm = y^* m = S_2, && \int z\, dm = z^* m = S_3 \\ &\int (y^2 + z^2)\, dm = J_1, && \int (z^2 + x^2)\, dm = J_2, && \int (x^2 + y^2)\, dm = J_3 && \text{(10),} \\ &\int y z\, dm = D_1, && \int z x\, dm = D_2, && \int x y\, dm = D_3 && \end{aligned}$$

so nimmt das Schema der Trägheits-Dyade T die übersichtliche Form an:

$$\left\{ \begin{matrix} m & 0 & 0 & 0 & S_3 & -S_2 \\ 0 & m & 0 & -S_3 & 0 & S_1 \\ 0 & 0 & m & S_2 & -S_1 & 0 \\ 0 & -S_3 & S_2 & J_1 & -D_3 & -D_2 \\ S_3 & 0 & -S_1 & -D_3 & J_2 & -D_1 \\ -S_2 & S_1 & 0 & -D_2 & -D_1 & J_3 \end{matrix} \right\} \quad \text{. . . . (11).}$$

Man erkennt, daß die Matrix in bezug auf die von links oben nach rechts unten laufende Diagonale **symmetrisch** ist, aber darüber hinaus noch verschiedene Besonderheiten aufweist, die zusammen mit der Symmetrie die Zahl der voneinander verschiedenen Elemente von 36 auf 10 herabsetzen. Wir werden auf die Verwendung der Trägheits-Dyade noch an späterer Stelle zurückkommen.

4. Addition und Multiplikation. Die Dyade als Transformation. Die Addition von Dyaden und ihre Multiplikation mit skalaren Zahlen läßt sich im Anschluß an die Definition der Dyade sehr einfach erledigen. Wir erklären als Summe der Dyaden A und B eine Dyade Γ, die dadurch definiert ist, daß jedem Einheitsmotor $\mathfrak{E}$ der Motor $\mathfrak{G}_{\mathfrak{E}} = \mathfrak{A}_{\mathfrak{E}} + \mathfrak{B}_{\mathfrak{E}}$ zugeordnet wird; analog als Produkt der Zahl λ und der Dyade A die Dyade B, für die $\mathfrak{B}_{\mathfrak{E}} = \lambda\,\mathfrak{B}$. Man kann also die »linearen Operationen«, die Addition und die Multiplikation mit einem Skalar, an den Komponenten, d. h. an den Elementen der 36-gliedrigen Matrizen ausführen. Damit ist zugleich die Integration und die Differentation nach einem Skalar erklärt.

Die wichtigste rechnerische Verknüpfung aber, in die eine Dyade eintritt, ist ihre einfache Multiplikation mit dem zugehörigen Gebilde erster Stufe, dem Vektor bezw. Motor. Diese Operation führt auch zu einer etwas veränderten Auffassung der Dyade selbst. Wir wollen sie der Anschaulichkeit wegen zunächst an der Vektor-Dyade und dem Vektor erklären.

Sei Π eine vektorische Dyade und $\mathfrak{v}$ ein beliebiger Vektor. Für eine Richtung (Einheitsvektor) ν hat Π den Wert $\mathfrak{p}_\nu$, der sich in der Form des Ausdrucks (2) darstellt. Sei nun ν als die Richtung von $\mathfrak{v}$ gewählt und v die Länge des Vektors $\mathfrak{v}$, dann nennen wir $v\mathfrak{p}_\nu$ das »Produkt der Dyade Π in den Vektor $\mathfrak{v}$« und schreiben:

$$\Pi\mathfrak{v} = \mathfrak{p}_\nu v = \mathfrak{p}_x v\cos(\nu x) + \mathfrak{p}_y v\cos(\nu y) + \mathfrak{p}_z v\cos(\nu z) = \mathfrak{p}_x v_x + \mathfrak{p}_y v_y + \mathfrak{p}_z v_z \qquad (12).$$

Die letzte Form des Ausdrucks zeigt die Analogie mit dem skalaren Produkt zweier Vektoren; es ist nur jetzt der eine Faktor in jedem der drei Teilprodukte ein Vektor, der andere ein Skalar. Daß ein invarianter, d. h. von der Wahl der Achsrichtungen unabhängiger Wert entsteht, geht aus der ersten Form der Definition hervor. In Worten lautet sie: Unter dem Produkt der (Vektor-)Dyade Π in den Vektor $\mathfrak{v}$ verstehen wir das Produkt der Vektorlänge v in den der Richtung von $\mathfrak{v}$ zugeordneten Vektor $\mathfrak{p}_\nu$ der Dyade Π. Ersetzen wir hier die Dyade Π durch einen Vektor $\mathfrak{p}$ und setzen demgemäß für $\mathfrak{p}_\nu$ die Vektorkomponente p_ν, so erhalten wir eine neue Definition des skalaren Produkts $\mathfrak{v}\mathfrak{p}$.

Den Uebergang zu der veränderten Deutung der Dyade gewinnt man, wenn man Gl. (12) auf einen Einheitsvektor $\bar{\nu}$ anwendet. Man erhält:

$$\Pi\bar{\nu} = \mathfrak{p}_\nu = \mathfrak{p}_x \cos(\nu x) + \mathfrak{p}_y \cos(\nu y) + \mathfrak{p}_z \cos(\nu z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12'),$$

d. h. der »Wert« der Dyade für die Richtung ν ist gleich ihrem Produkt mit dem Einheitsvektor dieser Richtung (wie der »Wert« des Vektors $\mathfrak{v}$ für die Richtung ν das Produkt $\mathfrak{v}\bar{\nu}$). Es liegt danach nahe, die Gl. (12) dahin zu deuten, daß durch die Dyade Π einem beliebigen Vektor $\mathfrak{v}$ ein neuer Vektor $\Pi\mathfrak{v}$ »linear zugeordnet« werde (während nach der ursprünglichen Definition nur den Einheitsvektoren $\bar{\nu}$ die $\mathfrak{p}_\nu$ zugeordnet waren). Die 9 Elemente der die Dyade bestimmenden Matrix bilden zugleich das Koeffizientenschema der drei Gleichungen, die die Komponenten des transformierten Vektors durch die des ursprünglichen ausdrücken. Wir gehen gleich dazu über, die analogen Begriffsbildungen innerhalb der Motoranalysis zu erklären.

Sei $\boldsymbol{\Pi}$ eine motorische Dyade und $\mathfrak{P}_{\mathfrak{E}}$ ihr Wert für den Einheitsmotor $\mathfrak{E}$. Ein beliebiger Motor $\mathfrak{M}$ kann immer als ein skalares Vielfaches eines bestimmten Einheitsmotors aufgefaßt werden, er sei also etwa $\mathfrak{M} = M\,\mathfrak{E}$. Dann bezeichnen wir als das Produkt der Motor-Dyade $\boldsymbol{\Pi}$ in den Motor $\mathfrak{M}$ das Produkt der Zahl M in den dem Einheitsmotor $\mathfrak{E}$ von $\mathfrak{M}$ zugeordneten Motor $\mathfrak{P}_{\mathfrak{E}}$ der Dyade $\boldsymbol{\Pi}$

$$\boldsymbol{\Pi}\,\mathfrak{M} = M\,\mathfrak{P}_{\mathfrak{E}} = M(\mathfrak{P}_4 E_1 + \mathfrak{P}_5 E_2 + \ldots . \mathfrak{P}_3 E_6) = M_1 \mathfrak{P}_4 + M_2 \mathfrak{P}_5 + \ldots . M_6 \mathfrak{P}_3 \quad (13).$$

Multiplikation mit der Dyade $\boldsymbol{\Pi}$ bedeutet also für den Motor $\mathfrak{M}$ eine Transformation in einem Motor $\mathfrak{M}'$, für den wir $\boldsymbol{\Pi}\,\mathfrak{M}$ schreiben wollen. Die 6 Transformationsgleichungen, die die Komponenten von $\mathfrak{M}'$ durch die von $\mathfrak{M}$ ausdrücken, erhält man durch Zerlegung von (13) in Komponenten:

$$\left.\begin{aligned}
M_1' &= P_{11}\,M_4 + P_{21}\,M_5 + P_{31}\,M_6 + P_{41}\,M_1 + P_{51}\,M_2 + P_{61}\,M_3 \\
M_2' &= P_{12}\,M_4 + P_{22}\,M_5 + P_{32}\,M_6 + P_{42}\,M_1 + P_{52}\,M_2 + P_{62}\,M_3 \\
M_3' &= P_{13}\,M_4 + P_{23}\,M_5 + P_{33}\,M_6 + P_{43}\,M_1 + P_{53}\,M_2 + P_{63}\,M_3 \\
M_4' &= P_{14}\,M_4 + P_{24}\,M_5 + P_{34}\,M_6 + P_{44}\,M_1 + P_{54}\,M_2 + P_{64}\,M_3 \\
M_5' &= P_{15}\,M_4 + P_{25}\,M_5 + P_{35}\,M_6 + P_{45}\,M_1 + P_{55}\,M_2 + P_{65}\,M_3 \\
M_6' &= P_{16}\,M_4 + P_{26}\,M_5 + P_{36}\,M_6 + P_{46}\,M_1 + P_{56}\,M_2 + P_{66}\,M_3
\end{aligned}\right\} \quad . \quad (14).$$

Hier bilden die 36 Elemente der in (6) angeschriebenen Matrix das Koeffzientenschema der sechs linearen Gleichungen, die $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{M}'$ verwandeln; dabei müssen allerdings die Zeilen mit den Spalten vertauscht werden und man muß darauf achten, daß die Reihe der Variablen mit M_4, nicht mit M_1 beginnt.

Die für uns wichtigste Anwendung der Transformations-Eigenschaft der Dyade, bezw. der jetzt behandelten Multiplikation, besteht darin, daß der Geschwindigkeitsmotor eines Körpers durch Multiplikation mit der Trägheits-Dyade in den Impulsmotor (Motor der Bewegungsgröße) transformiert wird. Davon wird im III. Abschnitt ausführlicher die Rede sein.

5. Dyadische Produkte. Sowohl in der Vektor- wie in der Motorrechnung kann man noch von einer anderen Seite her, und zwar von einer formal rechnerischen, zum Dyadenbegriff (wenn auch zunächst zu einem etwas beschränkteren) gelangen. Wir wollen auch hier die der Vektortheorie angehörigen Ueberlegungen voranstellen und daran die der Motortheorie in Analogie erklären.

Der Begriff des »dyadischen Produktes« entspringt der Forderung, daß in einem dreifachen Produkt aus Vektoren jeder Faktor »heraushebbar« sein soll. Für das Produkt $\mathfrak{a}\cdot(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c})$ ist die Forderung zufolge der Vertauschungsregel (vergl. I, **9**) ohne weiteres erfüllt; für das Produkt $\mathfrak{a}\times(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c})$ gibt die Entwicklungsregel (I, **9**) keine Lösung, ebenso bleibt das Produkt $\mathfrak{a}(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c})$ noch zu erledigen. Man definiert nun, wenn zwei beliebige Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ gegeben sind, als ihre »Gibbssche Produkt-Dyade« oder als ihr Gibbssches Produkt, die Dyade, deren Wert für die Richtung ν gleich $\mathfrak{a}(\mathfrak{b}\cdot\nu)$ ist. Daß damit wirklich eine lineare Funktion der Richtung festgelegt wird, erkennt man ohne weiteres, sobald man den Ausdruck in der Form $\mathfrak{a}[b_x\cos(\nu x)+b_y\cos(\nu y)+b_z\cos(\nu z)]$ schreibt. Jeder Richtung ν ist hier ein Vektor zugeordnet, der mit $\mathfrak{a}$ gleichgerichtet ist und dessen Länge a mal der Projektion von $\mathfrak{b}$ auf die betreffende Richtung ist. Nach Gibbs bezeichnen wir das dyadische Produkt mit $\mathfrak{a};\mathfrak{b}$ (gelesen: a — Strichpunkt — b). Die neun Komponenten dieser Dyade sind

$$\left|\begin{matrix} a_x b_x & a_y b_x & a_z b_x \\ a_x b_y & a_y b_y & a_z b_y \\ a_x b_z & a_y b_z & a_z b_z \end{matrix}\right| \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15),$$

woran man ersieht, daß ihr gewisse Eigenschaften eines Produktes von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zukommen, z. B. die, daß die Komponenten bei Veränderung der Länge a oder b dieser proportional sich ändern. Bezeichnet nun $\mathfrak{c}$ einen beliebigen Vektor der Richtung ν, also so, daß $\mathfrak{c}=c\nu$, so erhält man nach der Definition des Produktes einer Dyade mit einem Vektor (**4**):

$$(\mathfrak{a};\mathfrak{b})\,\mathfrak{c}=\mathfrak{a}(\mathfrak{b}\cdot\nu)\,c=\mathfrak{a}(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c}) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16).$$

Damit ist in der Tat das formale Ziel erreicht, den durch $\mathfrak{a}(\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c})$ definierten Vektor als ein Produkt darzustellen, dessen einer Faktor $\mathfrak{c}$ ist.

G. Jaumann hat der Gibbsschen Produktdyade eine zweite gegenübergestellt, die das Analoge für das andere der oben angeführten ternären Produkte leistet. Wir definieren als »Jaumannsche Produktdyade« oder als Jaumannsches Produkt der Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ die Dyade, deren Wert für die Richtung ν gleich $\mathfrak{a}\times(\mathfrak{b}\times\nu)$ ist und schreiben dafür $\mathfrak{a}\overset{\times}{;}\mathfrak{b}$ (gelesen: a — Kreuz-Strich — b). Wieder erkennt man, daß eine lineare Richtungsfunktion vorliegt, da die Richtungscosinus nur linear in die Ausdrücke für die Komponenten von $\mathfrak{a}\times(\mathfrak{b}\times\nu)$ eingehen; z. B. ist die x-Komponente gleich $a_y[b_x\cos(\nu y)-b_y\cos(\nu x)]-a_z[b_z\cos(\nu x)-b_x\cos(\nu z)]$ usf. Die neungliedrige Matrix (deren erste Spalte man aus dem vorstehenden Ausdruck erhält, indem man ν mit x, y, z zusammenfallen läßt), lautet mithin:

$$\left\{\begin{matrix} -a_y b_y - a_z b_z & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & -a_z b_z - a_x b_x & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & -a_x b_x - a_y b_y \end{matrix}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (17).$$

Die Anwendung des in **4** erklärten Produktbegriffes liefert, wenn $\mathfrak{c}$ die Richtung ν hat:

$$(\mathfrak{a}\overset{\times}{;}\mathfrak{b})\,\mathfrak{c}=\mathfrak{a}\times(\mathfrak{b}\times\nu)\,c=\mathfrak{a}\times(\mathfrak{b}\times\mathfrak{c}) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18),$$

womit in der Tat das Verlangte geleistet ist. Auf die mannigfaltige Verwendung der dyadischen Produkte von Vektoren in verschiedenen Teilen der Mechanik und Physik

gehen wir hier nicht ein, sondern wenden uns gleich zu den analogen Begriffsbildungen der Motorrechnung.

Als erstes dyadisches Produkt zweier Motoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ definieren wir eine Motordyade $\mathfrak{A};\mathfrak{B}$, deren Wert für den Einheitsmotor $\mathfrak{E}$ gleich $\mathfrak{A}(\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{E})$ ist. Führt man den Ausdruck (3) aus I für das skalare Produkt $\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{E}$ ein, so erhält man für den Wert der Dyade:

$$\mathfrak{A}B_4E_1+\mathfrak{A}B_5E_2+\mathfrak{A}B_6E_3+\mathfrak{A}B_1E_4+\mathfrak{A}B_2E_5+\mathfrak{A}B_3E_6 \quad . \quad . \quad (19).$$

Das 36gliedrige Schema der Dyade, das zeilenweise die skalaren Komponenten der Motoren $\mathfrak{A}B_1$ $\mathfrak{A}B_2 \ldots\ldots \mathfrak{A}B_6$ enthalten muß, sieht demnach so aus:

$$\left\{\begin{matrix} A_1B_1 & A_2B_1 & \ldots\ldots\ldots\ldots & A_6B_1 \\ A_1B_2 & A_2B_2 & \ldots\ldots\ldots\ldots & A_6B_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ A_1B_6 & A_2B_6 & \ldots\ldots\ldots\ldots & A_6B_6 \end{matrix}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19').$$

Da jedes Element hier eine Komponente von $\mathfrak{A}$ als Faktor enthält, so folgt daraus, daß eine Vervielfachung von $\mathfrak{A}$ jeden Wert der Dyade in gleichem Maße vervielfacht; überdies, daß die Werte sich additiv verhalten, wenn man $\mathfrak{A}$ durch eine Summe $\mathfrak{A}'+\mathfrak{A}''$ ersetzt. Mit anderen Worten: Es gelten die Rechenregeln:

$$(\lambda\mathfrak{A};\mathfrak{B})=\lambda(\mathfrak{A};\mathfrak{B}),\qquad (\mathfrak{A}'+\mathfrak{A}'');\mathfrak{B}=(\mathfrak{A}';\mathfrak{B})+(\mathfrak{A}'';\mathfrak{B}) \quad . \quad . \quad (20)$$

und natürlich die entsprechenden für $\lambda\mathfrak{B}$ bezw. $\mathfrak{B}'+\mathfrak{B}''$. Wichtig ist die Anwendung der in **4** erklärten Produktbildung. Sie liefert, wenn mit $\mathfrak{C}$ irgend ein Motor bezeichnet wird

$$(\mathfrak{A};\mathfrak{B})\,\mathfrak{C}=\mathfrak{A}(\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21);$$

denn der Ausdruck rechts in (21) geht aus (19) hervor, sobald man hier die Komponenten $E_1, E_2 \ldots E_6$ durch $C_1, C_2 \ldots C_6$ ersetzt.

Wir definieren jetzt als zweites dyadisches Motorprodukt der Motoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ die Motordyade $\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}$ (lies: $\mathfrak{A}$ — Kreuz-Strich — $\mathfrak{B}$), deren Wert für den Einheitsmotor $\mathfrak{E}$ gleich $\mathfrak{A}\times(\mathfrak{B}\times\mathfrak{E})$ ist. Die ersten drei Skalarkomponenten dieses, dem Einheitsmotor $\mathfrak{E}$ zugeordneten, Motors sind die Komponenten des Vektors $\mathfrak{A}\times(\mathfrak{B}\times\mathfrak{E})$, also $A_2(B_1E_2-B_2E_1)-A_3(B_3E_1-B_1E_3)$ usf.; die anderen drei sind die Komponenten des Vektors $\mathfrak{A}\times(\mathfrak{B}\times\mathfrak{E}_0+\mathfrak{B}_0\times\mathfrak{E})+\mathfrak{A}_0\times(\mathfrak{B}\times\mathfrak{E})$, von denen die erste lautet: $A_2(B_1E_5-B_2E_4+B_4E_2-B_5E_1)-A_3(B_3E_4-B_1E_6+B_6E_1-B_4E_3)+A_5(B_1E_2-B_2E_1)-A_6(B_3E_1-B_1E_3)$ usf. Das Schema der Dyade erhält man, indem man die Faktoren von $E_4, E_5 \ldots\ldots$ in diesen Ausdrücken herausgreift, wie folgt:

$$\left\{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & -(A_2B_2+A_3B_3) & A_1B_2 & A_1B_3 \\ 0 & 0 & 0 & A_2B_1 & -(A_1B_1+A_3B_3) & A_2B_3 \\ 0 & 0 & 0 & A_3B_1 & A_3B_2 & -(A_1B_1+A_2B_2) \\ (A_2B_2+A_3B_3) & A_1B_2 & A_1B_3 & -(A_2B_5+A_3B_6+A_5B_2+A_6B_3) & A_4B_2+A_1B_5 & A_4B_3+A_1B_6 \\ A_2B_1 & -(A_3B_3+A_1B_1) & A_2B_3 & A_2B_4+A_5B_1 & -(A_3B_6+A_1B_4+A_6B_3+A_4B_1) & A_5B_3+A_2B_6 \\ A_3B_1 & A_3B_2 & -(A_1B_1+A_2B_2) & A_3B_4+A_6B_1 & A_3B_5+A_6B_2 & -(A_1B_4+A_2B_5+A_4B_1+A_5B_2) \end{matrix}\right\}$$

Da auch hier wieder jedes Element eine Komponente von $\mathfrak{A}$ (und von $\mathfrak{B}$) als Faktor enthält, gelten die zu (20) analogen Rechenregeln:

$$(\lambda\mathfrak{A}\times\mathfrak{B})=\lambda(\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}),\qquad (\mathfrak{A}'+\mathfrak{A}'')\times\mathfrak{B}=(\mathfrak{A}'\times\mathfrak{B})+(\mathfrak{A}''\times\mathfrak{B}) \quad . \quad (23)$$

und natürlich die ebenso lautenden hinsichtlich des zweiten Faktors $\mathfrak{B}$. Endlich hat man entsprechend (21) nach der Produkt-Definition in **4**:

$$(\mathfrak{A}\times\mathfrak{B})\,\mathfrak{C}=\mathfrak{A}\times(\mathfrak{B}\times\mathfrak{C}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24).$$

6. Produkt zweier Dyaden. Die Verfolgung der wichtigen Frage, wie die 36 skalaren Komponenten einer Dyade sich verändern, wenn man ein neues Koordinatensystem wählt, führt auf die Definition eines Produktes zweier Dyaden. Wir geben zunächst die Erklärung für den Fall der Vektoranalysis.

Seien A und B zwei (Vektor)-Dyaden, deren Werte für eine Richtung $\bar{\nu}$ wie bisher durch $\mathfrak{A}_\nu$ bezw. $\mathfrak{B}_\nu$ bezeichnet werden, Γ eine dritte Dyade mit den Komponenten $\mathfrak{C}_\nu$. Wir bezeichnen Γ als Produkt von A in B und schreiben

$$\Gamma=A\times B,\ \text{wenn}\ \mathfrak{C}_\nu=B\,\mathfrak{A}_\nu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25),$$

d. h. also, wenn jeder Wert von Γ der durch B transformierte Wert von A ist. Da die $\mathfrak{A}_\nu$ eine lineare Funktion der Richtungscosinus bilden, gilt dies auch für $B\mathfrak{A}_\nu$, so daß in der Tat durch die zweite der Gl. (25) eine Dyade definiert ist. Der Wert von Γ für die x-Richtung ist $\mathfrak{C}_x = B\mathfrak{A}_x = A_{xx}\mathfrak{B}_x + A_{xy}\mathfrak{B}_y + A_{xz}\mathfrak{B}_z$. Nimmt man hiervon die x-Komponente, so erhält man $C_{xx} = A_{xx}B_{xx} + A_{xy}B_{yx} + A_{xz}B_{zx}$, ebenso die y-Komponente $C_{xy} = A_{xx}B_{xy} + A_{xy}B_{yy} + A_{xz}B_{zy}$ usf. Die Matrix von Γ sieht demnach so aus, daß in der ι-ten Zeile und $\varkappa$-ten Spalte eine Summe von drei Produkten steht, deren erster Faktor der ι-ten Zeile von A, deren zweiter der $\varkappa$-ten Spalte von B entstammt, wobei beide Reihen von Anfang bis zum Ende durchlaufen werden. Man sieht, daß nach dieser Definition das Produkt $B \times A$ wesentlich von dem Produkt $A \times B$ verschieden ist. Vertauscht man in jeder der beiden gegebenen Dyaden Zeilen und Spalten miteinander, stellt also die Elemente so um, daß die, die zuerst nebeneinander standen, untereinander zu stehen kommen und umgekehrt, so ist das nach der Umstellung definitionsgemäß gebildete Produkt gleich $B \times A$.

Wir wollen nun diese Ueberlegungen etwas ausführlicher auf dem Gebiet der Motoranalysis verfolgen. Wir betrachten zwei Motordyaden A und B mit den Motorkomponenten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ und führen ein Produkt $\mathsf{\Gamma}$ von A in B durch folgende Definition ein: Produkt der Dyade A in die Dyade B nennen wir eine Dyade $\mathsf{\Gamma}$, wenn ihr Wert $\mathfrak{C}_{\mathfrak{E}}$ für einen beliebigen Einheitsmotor $\mathfrak{E}$ gleich dem durch die Dyade B transformierten entsprechenden Wert $\mathfrak{A}_{\mathfrak{E}}$ der Dyade A ist, also

$$\mathsf{\Gamma} = \mathsf{A} \times \mathsf{B}, \text{ wenn } \mathfrak{C}_{\mathfrak{E}} = \mathsf{B} \cdot \mathfrak{A}_{\mathfrak{E}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (28).$$

Da $\mathfrak{A}_{\mathfrak{E}}$ eine lineare Funktion der Komponenten von $\mathfrak{E}$ ist, gilt dies auch für $\mathfrak{C}_{\mathfrak{E}}$, so daß wirklich durch (28) eine Dyade bestimmt wird.

Setzen wir für $\mathfrak{E}$ den Einheitsmotor mit den skalaren Komponenten 0, 0, 0, 1, 0, 0, so wird nach (5) aus $\mathfrak{A}_{\mathfrak{E}}$ der Motor $\mathfrak{A}_1$ und nach der eben gegebenen Definition ist für das entsprechende $\mathfrak{C}_{\mathfrak{E}}$ auch $\mathfrak{C}_1$ zu schreiben. Die Komponenten $C_{11}, C_{12} \ldots . C_{16}$ sind dann nach (14) zu rechnen, indem man dort an Stelle der $P_{11} \ldots P_{66}$ jetzt $B_{11} \ldots . B_{66}$, an Stelle der $M_1 \ldots . M_6$ jetzt $A_{11} \ldots . A_{16}$ setzt, also

$$\left.\begin{aligned} C_{11} &= A_{14}B_{11} + A_{15}B_{21} + A_{16}B_{31} + A_{11}B_{41} + A_{12}B_{51} + A_{13}B_{61} \\ C_{12} &= A_{14}B_{12} + A_{15}B_{22} + A_{16}B_{32} + A_{11}B_{42} + A_{12}B_{52} + A_{13}B_{62} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad . \quad (29).$$

Die 6 Ausdrücke, von denen hier die beiden ersten angeschrieben sind, stehen in dem 36gliedrigen Schema der Dyade B in der ersten Zeile. Die Elemente der zweiten Zeile $C_{21}, C_{22} \ldots . C_{26}$ sind die Komponenten von $\mathfrak{C}_2$ und rechnen sich in gleicher Weise aus den Komponenten $A_{21}, A_{22} \ldots . A_{26}$ von $\mathfrak{A}_2$. Zusammenfassend kann man alle diese Ausdrücke in der Form

$$C_{\iota\varkappa} = A_{\iota 4}B_{1\varkappa} + A_{\iota 5}B_{2\varkappa} + A_{\iota 6}B_{3\varkappa} + A_{\iota 1}B_{4\varkappa} + A_{\iota 2}B_{5\varkappa} + A_{\iota 3}B_{6\varkappa} \; . \quad (29')$$

schreiben, kürzer noch in der Gestalt

$$C_{\iota\varkappa} = \sum_{\rho=1}^{6} A_{\iota\rho} B_{\rho+3,\varkappa} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (29''),$$

wobei natürlich für Indices, die sich höher als 6 ergeben würden, der Rest auf 6 zu setzen ist, d. h. für 7, 8, 9 der Reihe nach 1, 2, 3. Aus diesen Darstellungen ergibt sich folgende Regel für die Herstellung des Produktes zweier Dyaden: Man erhält das Element der ι-ten Zeile und $\varkappa$-ten Spalte des Produktes $\mathsf{\Gamma}$ als eine Summe von sechs Produkten aus je zwei Faktoren; die einen Faktoren sind der Reihe nach die Elemente der ι-ten Zeile von A, die anderen die Elemente der $\varkappa$-ten Spalte von B, ebenfalls der Reihe nach, aber um drei Stellen (zyklisch) verschoben.

Die Definition und die Formeln (28) und (29) lassen ohne weiteres erkennen, daß die jetzt definierte Operation assoziativ ist zu der Multiplikation mit einem Skalar und distributiv mit der Addition von Dyaden, d. h. es gilt:

$$\lambda(\mathsf{A} \times \mathsf{B}) = (\lambda\mathsf{A}) \times \mathsf{B}, \; \mathsf{\Gamma} \times (\mathsf{A} + \mathsf{B}) = \mathsf{\Gamma} \times \mathsf{A} + \mathsf{\Gamma} \times \mathsf{B} \quad . \; . \; . \quad (30).$$

Dagegen gilt nicht das kommutative Gesetz. Denn wenn A und B ihre Rollen vertauschen, so treten in (29') die Elemente der ι-ten Zeile von B und der $\varkappa$-ten Spalte von A auf. Es gilt also

$$\mathsf{\Gamma} = \mathsf{A} \times \mathsf{B} \text{ zugleich mit } \mathsf{\Gamma}' = \mathsf{B}' \times \mathsf{A}' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (31),$$

wenn der mit Accent versehene Buchstabe die Dyade bezeichnet, die durch Umstellung, d. h. Vertauschung des Nebeneinander mit dem Untereinander, aus der nicht gestrichenen hervorgeht.

Ein zweites assoziatives Gesetz von praktischer Bedeutung kommt in folgender Formel zum Ausdruck:

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{\Gamma} = \mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{\Gamma}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32).$$

Um sie zu beweisen, beachte man nur, daß nach (29″) das Element mit den Indices ι, λ für die linke Seite die über ϱ und $\varkappa$ erstreckte Doppelsumme von $A_{\iota\varrho}\, B_{\varrho+3,\varkappa}\, C_{\varkappa+3,\lambda}$ ist; faßt man hier bei festgehaltenem ϱ den zweiten und dritten Faktor zusammen, so liefert er das Element mit den Indices $\varrho+3, \lambda$ des Produktes $\mathbf{B}\times\mathbf{\Gamma}$, so daß die Gesamtsumme unter Hinzunahme des ersten Faktors das Element mit den Indices ι, λ auch für die rechte Seite ergibt. Die Klammern dürfen somit beim Anschreiben der dreifachen Produktes fortbleiben.

7. Koordinaten-Transformation. Anwendung findet der Produktbegriff vor allem, wenn es sich darum handelt, den Uebergang von einem Koordinatenkreuz zu einem anderen darzustellen. Seien — zunächst im Bereich der Vektorrechnung — x', y', z', die neuen (rechtwinkligen) Achsrichtungen und Π eine beliebige Vektordyade mit den (auf die alten Achsen bezogenen) Komponenten $\mathfrak{p}_x, \mathfrak{p}_y, \mathfrak{p}_z$ bezw. $p_{xx}, p_{xy} \ldots . p_{zz}$. Bezeichnen wir den cos des Winkels zwischen einer neuen und einer alten Achse kurz mit den in Klammern gesetzten Buchstaben (xx'), (xy') usf., so haben wir den Wert der Dyade für die Richtung x' in der Form $\mathfrak{p}_x(xx') + \mathfrak{p}_y(yx') + \mathfrak{p}_z(zx')$. Um die Komponente dieses Vektors beispielsweise für die y'-Richtung zu bekommen, müssen wir die drei Komponenten für die x-, y- und z-Richtung, der Reihe nach mit (xy'), (yy') bezw. (zy') multipliziert, addieren. So erhält man

$$\begin{aligned} p_{x'y'} = (xy')\,[p_{xx}(xx') + p_{yx}(yx') + p_{zx}(zx')] + (yy')\,[p_{xy}(xx') + p_{yy}(yx') + p_{zy}(zx')] \\ + (zy')\,[p_{xz}(xx') + p_{yz}(yx') + p_{zz}(zx')] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26) \end{aligned}$$

und analog die übrigen Komponenten. Führt man nun die beiden durch Umstellung auseinander hervorgehenden Vektor-Dyaden Ω und Ω' ein, deren Matrices so aussehen:

$$\begin{Bmatrix} (xx') & (yx') & (zx') \\ (xy') & (yy') & (zy') \\ (xz') & (yz') & (zz') \end{Bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{Bmatrix} (xx') & (xy') & (xz') \\ (yx') & (yy') & (yz') \\ (zx') & (zy') & (zz') \end{Bmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27),$$

so findet man, daß die drei Ausdrücke in den eckigen Klammern gerade die drei Elemente der ersten Zeile von $\Omega\times\Pi$ bilden. Denn sie bestehen aus Produkten, deren zweiter Faktor stets der ersten Zeile von Ω entnommen ist, während der andere Faktor der ersten, zweiten und dritten Spalte von Π entstammt. Nun sind diese Ausdrücke noch der Reihe nach multipliziert mit den Elementen der zweiten Spalte von Ω'. Daher bildet der Ausdruck (26) das Element der ersten Zeile und zweiten Spalte einer Produktdyade, die man in der Gestalt $(\Omega\times\Pi)\times\Omega'$ schreiben kann. Da man aber bei anderer Zusammenfassung der Glieder in (26) auch findet, daß diese das analoge Element in dem Produkt $\Omega\times(\Pi\times\Omega')$ bilden, so darf man die Klammern auch weglassen und aussprechen: Die Komponenten der Dyade Π für das neue Achsenkreuz $x'y'z'$ erhält man als die auf die alten Achsen bezogenen Komponenten des Produktes $\Omega\times\Pi\times\Omega'$, wobei Ω, Ω' die in (27) definierten, aus den Richtungscosinus gebildeten Dyaden sind.

Im Bereich der Motorrechnung bedeutet Koordinaten-Transformation Uebergang von einem Achsenkreuz mit dem Anfangspunkt o und den Achsrichtungen x, y, z zu einem neuen Bezugsystem mit o' als Anfang und den Achsrichtungen x', y', z'. Der von o nach o' reichende Vektor habe, auf die alten Richtungen bezogen, die Komponenten a, b, c, die neuen Richtungen seien gegenüber den alten durch die neun Richtungscosinus (27) festgelegt. Wir fragen, wie die auf die neuen Achsen bezogenen skalaren Komponenten $P_{\iota\varkappa}'$ einer Motordyade Π aussehen, deren alte Komponenten $P_{11} \ldots . P_{66}$ gegeben sind? Um die Frage zu beantworten, betrachten wir sechs Einheitsmotoren $\mathfrak{E}_1' \ldots . \mathfrak{E}_6'$, von denen die ersten drei, als Dynamen aufgefaßt, reine Kräftepaare sind mit Momentvektoren der Länge 1 in den Richtungen der neuen Achsen, die letzten drei Einzelkräfte von der gleichen Größe und Richtung, angreifend in o'. Die auf das alte Achsenkreuz bezogenen Komponenten dieser sechs Einheitsmotoren, zeilenweise nebeneinander geschrieben, ergeben folgendes Schema:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & (xx') & (yx') & (zx') \\ 0 & 0 & 0 & (xy') & (yy') & (zy') \\ 0 & 0 & 0 & (xz') & (yz') & (zz') \\ (xx') & (yx') & (zx') & b(zx')-c(yx') & c(xx')-a(zx') & a(yx')-b(xx') \\ (xy') & (yy') & (zy') & b(zy')-c(yy') & c(xy')-a(zy') & a(yy')-b(xy') \\ (xz') & (yz') & (zz') & b(zz')-c(yz') & c(xz')-a(zz') & a(yz')-b(xz') \end{pmatrix} \quad (33).$$

Von den Werten, die die Dyade $\boldsymbol{\Pi}$ der Reihe nach für diese sechs Einheitsmotoren $\mathfrak{E}_1'$ bis $\mathfrak{E}_6'$ annimmt, haben wir die je sechs Komponenten nach dem neuen Achsenkreuz zu bilden und zusammenzustellen: das sind dann die gesuchten $P'_{\iota\varkappa}$. Nun ist der Wert von $\boldsymbol{\Pi}$ für $\mathfrak{E}_\iota'$ nach (5) gleich der über $\varrho = 1$ bis 6 erstreckten Summe von $\mathfrak{P}_{\varrho+3} E'_{\iota\varrho}$ und die $\varkappa$-te Komponente hiervon (nach dem alten Achsenkreuz) gleich der Summe von $P_{\varrho+3,\varkappa} E'_{\iota\varrho}$. Aus den sechs alten Komponenten, die diese Formel für $\varkappa = 1, 2 \ldots 6$ liefert, bildet man nach (4), indem man sie der Reihe nach mit der 4., 5., 6., 1., 2., 3. Komponente von $\mathfrak{E}_\lambda'$ multipliziert, die Komponente, die dem Einheitsmotor $\mathfrak{E}_\lambda'$ entspricht, also den Wert $P'_{\iota\lambda}$, der sich demgemäß als Doppelsumme so darstellt:

$$P'_{\iota\lambda} = \sum_{\varrho,\varkappa} E'_{\iota\varrho} P_{\varrho+3,\varkappa} E'_{\lambda,\varkappa+3} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (34).$$

Dieser Ausdruck stimmt genau mit dem oben im Anschluß an (32) gegebenen allgemeinen Glied für die Komponente eines dreifachen Produktes, wenn man den Buchstaben B durch P ersetzt, für $A_{\iota\varrho}$ jetzt $E'_{\iota\varrho}$ und für $C_{\varkappa\lambda}$ jetzt $E'_{\lambda\varkappa}$ schreibt. Demnach haben wir den Satz: Ist ein neues Achsenkreuz durch den Verschiebungs-Vektor a, b, c und die Richtungscosinus $(x x') \ldots (z z')$ gegeben, so bilde man die Motordyade $\boldsymbol{\Omega}$, deren Schema (33) ist, und die durch Umstellung daraus hervorgehende $\boldsymbol{\Omega}'$; dann sind die (auf die alten Achsen bezogenen) Elemente des Produktes $\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Pi} \times \boldsymbol{\Omega}'$ gleich den auf die neuen bezogenen Elementen von $\boldsymbol{\Pi}$. Die völlige Analogie dieses Satzes mit dem oben angeführten der Vektoranalysis liegt auf der Hand.

Ist die Koordinatenänderung eine reine Translation bezw. eine reine Drehung, so nimmt das Schema von Ω die einfachere Form

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & c & -b \\ 0 & 1 & 0 & -c & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & b & -a & 0 \end{pmatrix} \text{ bezw. } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & (x x') & (y x') & (z x') \\ 0 & 0 & 0 & (x y') & (y y') & (z y') \\ 0 & 0 & 0 & (x z') & (y z') & (z z') \\ (x x') & (y x') & (z x') & 0 & 0 & 0 \\ (x y') & (y y') & (z y') & 0 & 0 & 0 \\ (x z') & (y z') & (z z') & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (33')$$

an. Setzt man im ersten Fall die a, b, c gleich Null, oder macht im zweiten die Winkel zwischen x und x' usf. zu Null, so gelangt man zu einer Matrix, die nur in den beiden dreizeiligen Parallelen zur Hauptdiagonale Einser, sonst überall Nullen enthält. Multiplikation mit dieser Dyade läßt sowohl einen Motor wie eine beliebige andere Dyade unverändert; sie wird daher mit Recht die »Identitäts-Dyade« oder Einheitsdyade heißen.

Die Dyade $\boldsymbol{\Omega}$, deren Schema (33) bildet, bezw. die umgestellte, kann auch dazu dienen, die Transformation eines Motors auf ein neues Achsenkreuz darzustellen. Man braucht nur zu bedenken, daß die auf das neue Achsenkreuz bezogene Komponente M_ι' eines Motors $\mathfrak{M}$ gleich dem Wert von $\mathfrak{M}$ für den Einheitsmotor $\mathfrak{E}_\iota'$ ist, also

$$M_\iota' = \sum_\varrho E_{\iota\varrho}' M_{\varrho+3} = E_{\iota 1}' M_4 + E_{\iota 2}' M_5 + \ldots . E\,{}_6' M_1 \quad \ldots \quad (34').$$

Vergleicht man dies mit (14), so sieht man, daß das Produkt $\boldsymbol{\Omega}' \cdot \mathfrak{M}$ den Motor mit den Komponenten M_ι' liefert: Man erhält die auf ein neues Achsenkreuz bezogenen Komponenten eines Motors $\mathfrak{M}$, indem man die alten Komponenten des Produktes $\boldsymbol{\Omega}' \cdot \mathfrak{M}$ bildet.

8. Infinitesimale Transformation. Anwendung auf die Trägheitsdyade. Für die Anwendungen in der Mechanik ist es wertvoll, auch kontinuierliche Koordinaten-Transformationen zu betrachten, wie sie bei einem stetig bewegten Bezugssystem zur Geltung kommen. Es ist am bequemsten, hier gleich den Zeit- und Geschwindigkeitsbegriff einzuführen. Nehmen wir also an, das Achsenkreuz $o'; x', y', z'$ falle zur Zeit $t = 0$ mit $o; x, y, z$ zusammen, bewege sich aber mit dem Geschwindigkeitsmotor $-\mathfrak{G}$, so daß $-\mathfrak{G}_o$ den Geschwindigkeitsvektor des Anfangspunktes, $-\mathfrak{G}$ den Vektor der Dreh-

geschwindigkeit der neuen Achsen gegen die alten darstellt. Für die Verschiebungsgrößen a, b, c von **7** treten jetzt die Komponenten von $-\mathfrak{G}_0\, dt$, während die drei Richtungscosinus $(x\,x')$, $(y\,y')$, $(z\,z')$ sich nur um Größen zweiter Ordnung in dt von 1 unterscheiden, so daß für sie 1 gesetzt werden muß. Der Wert von $(x'\,y)$ ist, wie man leicht sieht, bis auf Glieder höherer Ordnung gleich dem Winkel zwischen der x-Achse und der Projektion der x'-Achse auf die xy-Ebene, und dieser ist $-\mathfrak{G}_3\, dt$. Ebenso findet man für (x, z) den Wert $\mathfrak{G}_2\, dt$, für $(y'\,x)$ den Wert $\mathfrak{G}_3\, dt$ usf. Von der mit diesen Werten gebildeten Dyade $\mathbf{A}$ nach (33) wollen wir die Einheitsdyade $\mathbf{E}$ abziehen (d. h. die Einser in den Parallelen zur Hauptdiagonale weglassen) und das, was bleibt, durch dt dividieren. Die so entstehende Dyade, die wir $\mathbf{O}$ nennen, hat folgendes Schema

$$\left\{\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & -G_3 & G_2 \\ 0 & 0 & 0 & G_3 & 0 & -G_1 \\ 0 & 0 & 0 & -G_2 & G_1 & 0 \\ 0 & -G_3 & G_2 & 0 & -G_6 & G_5 \\ G_3 & 0 & -G_1 & G_6 & 0 & -G_4 \\ -G_2 & G_1 & 0 & -G_5 & G_4 & 0 \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (35).$$

Stellt man hier Zeilen und Spalten um, so kommt es auf dasselbe hinaus, wie wenn man überall plus- und minus-Zeichen vertauscht, d. h. es ist $\mathbf{O}' = -\mathbf{O}$, während für die Einheitsdyade $\mathbf{E}' = \mathbf{E}$ gilt. Die auf das neue Achsenkreuz bezogenen Elemente einer Dyade Π sind nach dem Ergebnis von **7** gleich den Elementen von $(\mathbf{O}\,dt + \mathbf{E}) \times \Pi \times (\mathbf{O}'\,dt + \mathbf{E})$ und dies ist, weil $\mathbf{E} \times \Pi = \Pi \times \mathbf{E} = \Pi$ gilt, bis auf Glieder zweiter Ordnung in dt gleich

$$(\mathbf{O} \times \Pi\, dt + \Pi) \times (\mathbf{O}'\,dt + \mathbf{E}) = (\mathbf{O} \times \Pi + \Pi \times \mathbf{O}')\,dt + \Pi.$$

Fragen wir nun nach der Aenderung, die die Elemente von Π durch die Bewegung des Bezugssystems erfahren, und beziehen diese Aenderung, um endliche Größen zu erhalten, auf die Zeiteinheit, so haben wir von dem vorstehenden Ausdruck Π zu subtrahieren und dann durch dt zu dividieren, und es bleibt schließlich

$$\frac{d\,\Pi}{dt} = \mathbf{O} \times \Pi + \Pi \times \mathbf{O}' = \mathbf{O} \times \Pi - \Pi \times \mathbf{O} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (36).$$

Daß wir auf die linke Seite die Ableitung von Π nach der Zeit gesetzt haben, rechtfertigt sich wie folgt. Denken wir uns, die Motordyade Π habe, bezogen auf ein mit der Geschwindigkeit $+\mathfrak{G}$ bewegtes Achsenkreuz unveränderliche Elemente (wie z. B. die Trägheitsdyade eines starren Körpers für ein mit dem Körper bewegtes System), so hat in der Zeit dt ein im Raum ruhendes Bezugsystem die Verschiebung $-\mathfrak{G}\,dt$ gegen das bewegte erhalten und (36) gibt gerade die — auf die Zeiteinheit bezogene — Veränderung an, die Π, vom ruhenden System aus gesehen, erfahren hat. Die Dyade $\mathbf{O}$ ist naturgemäß durch den Geschwindigkeitsmotor $\mathfrak{G}$ allein bestimmt. Es ist zweckmäßig, dies auch in der Bezeichnung zum Ausdruck zu bringen und — unter Einführung eines dyadischen Produktes eines Motors in eine Dyade — für (36) zu schreiben:

$$\frac{d\,\Pi}{dt} = \mathfrak{G} \times \Pi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (36').$$

Dabei gilt als Definition dieses Produktes die Uebereinstimmung von (36′) mit (36).

Der Ausdruck (36) tritt in der Dyadenrechnung an die Stelle des am Schluß von I, **7** erwähnten Ausdruckes $\mathfrak{G} \times \mathfrak{M}$ der Motorrechnung erster Stufe, der die zeitliche Aenderung eines mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{G}$ bewegten Motors $\mathfrak{M}$ liefert. Man überzeugt sich auch leicht durch Aufstellung der Komponenten, daß $\mathfrak{G} \times \mathfrak{M}$ identisch ist mit $\mathbf{O}' \cdot \mathfrak{M}$.

Die praktische Bedeutung der Formel (36) liegt vor allem darin, daß sie in rein schematischer Weise durch Anwendung der Multiplikationsregel von **6** die Aenderung der 36 Komponenten von Π hinzuschreiben gestattet. Man hat z. B., wenn wir der Uebersichtlichkeit halber u, v, w für G_4, G_5 G_6 und ω_1, ω_2, ω_3 für G_1, G_2, G_3 schreiben:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\,P_{11}}{dt} &= -\omega_3 P_{21} + \omega_2 P_{31} - \omega_3 P_{12} + \omega_2 P_{13} \\ \frac{d\,P_{14}}{dt} &= -\omega_3 P_{24} + \omega_2 P_{34} - w P_{12} + v P_{13} - \omega_3 P_{15} + \omega_2 P_{16} \\ \frac{d\,P_{41}}{dt} &= -\omega_3 P_{42} + \omega_2 P_{43} - w P_{21} + v P_{31} - \omega_3 P_{51} + \omega_2 P_{61} \\ \frac{d\,P_{44}}{dt} &= -w P_{24} + v P_{34} - \omega_3 P_{54} + \omega_2 P_{64} - w P_{42} + v P_{43} - \omega_3 P_{45} + \omega_2 P_{46} \end{aligned}\right\} (37).$$

Der Wert dieser und der allgemeinen Transformationsformeln des vorhergehenden Abschnittes geht deutlicher hervor, wenn wir sie auf das Beispiel der Trägheitsdyade anwenden. Nach (11) besteht die Trägheitsdyade, wenn wir den Anfang des Bezugsystems in den Schwerpunkt, die Achsenrichtungen in die der Trägheitshauptachsen verlegen, ausschließlich aus Elementen der Hauptdiagonale: $P_{11} = P_{22} = P_{33} = m$, $P_{44} = J_1$, $P_{55} = J_2$, $P_{66} = J_3$. In der Doppelsumme (34) sind also nur jene Summanden von Null verschieden, für die $\varrho + 3 = \varkappa$. Daher ist (34) durch die einfache Summe

$$P'_{\iota\lambda} = \sum_{\varkappa} E'_{\iota,\varkappa+3}\, P_{\varkappa\varkappa}\, E'_{\lambda,\varkappa+3} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (38)$$

zu ersetzen. Um ein bestimmtes $P'_{\iota\lambda}$ zu erhalten, muß man in der Matrix (33) die untereinanderstehenden Elemente der ι-ten und λ-ten Zeile miteinander multiplizieren und dann noch das entsprechende Glied aus der Hauptdiagonale der Trägheitsdyade als dritten Faktor hinzufügen. Man überzeugt sich leicht, daß im ersten Viertel von Π, ($\iota \leq 3$, $\lambda \leq 3$) nichts als die m in der Hauptdiagonale stehen bleiben. Für $\iota = 1$, $\lambda = 5$ erhält man

$$\left.\begin{aligned} & m\,[(x\,x')\,\{b\,(z\,y') - c\,(y\,y')\} + (y\,x')\,\{c\,(x\,y') - a\,(z\,y')\} + (z\,x')\,\{a\,(y\,y' - b\,(x\,y')\}] \\ & \qquad = -\,m\,[a\,(x\,z') + b\,(y\,z') + c\,(z\,z')] \end{aligned}\right\} \quad (38').$$

Die Gleichheit folgt aus der bekannten Eigenschaft der Matrix (27), nach der jedes ihrer Elemente gleich der zugeordneten Unterdeterminante ist. Der Ausdruck selbst ist offenbar das statische Moment S_3, das nach (11) an diese Stelle der Trägheitsmatrix gehört. Suchen wir nun das Element $\iota = \lambda = 4$, so erhalten wir nach Berücksichtigung der Eigenschaften von (27):

$$\left.\begin{aligned} & J_1' = J_1\,(x\,x')^2 + J_2\,(y\,x')^2 + J_3\,(z\,x')^2 + m\,(b'^2 + c'^2) \\ & \text{mit } b' = a\,(x\,y') + b\,(y\,y') + c\,(z\,y'),\ c' = a\,(x\,z') + b\,(y\,z') + c\,(z\,z') \end{aligned}\right\} \quad . \quad (38'').$$

Damit ist die allgemeinste Transformationsformel für Trägheitsmomente, und, wenn man etwa $\iota = 4$, $\lambda = 5$ wählt, die für Deviationsmomente, gewonnen. Den sog. Steinerschen Satz über Parallelverschiebung erhält man mit $(x\,x') = 1 \ldots$, $(x\,y') = 0 \ldots$ in der Form $J_1' = J_1 + m\,(b^2 + c^2)$ und erkennt damit dessen eigentliche Quelle.

Die infinitesimale Transformation, wie sie in (37) zum Ausdruck kommt, wollen wir auch auf die allgemeine Form der Trägheitsdyade, bei der kein spezialisiertes Ausgangs-Bezugsystem angenommen wird, anwenden. Es zeigt sich dann sofort, wenn wir in (37) für die $P_{\iota\lambda}$ die Werte aus (11) einsetzen, daß von Null verschiedene Ableitungen nur an Stellen auftreten, die in (11 nicht mit Nullen oder dem Wert m besetzt sind, z. B. für $\iota = \lambda = 4$, für $\iota = 5$, $\lambda = 6$ und $\iota = 2$, $\lambda = 6$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\,J_1}{d\,t} &= 2\,w\,S_3 + 2\,v\,S_2 + 2\,\omega_3\,D_3 - 2\,\omega_2\,D_2\,, \\ \frac{d\,D_1}{d\,t} &= \omega_1\,(J_3 - J_2) + \omega_3\,D_2 - \omega_2\,D_3 + w\,S_2 + v\,S_3 \\ \frac{d\,S_1}{d\,t} &= m\,u + \omega_2\,S_3 - \omega_3\,S_2 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (39).$$

Diese Formeln sind für die allgemeinen Ansätze der Bewegungsgleichungen starrer Körper von Wichtigkeit (vergl. dazu III, **1** und **2**).

9. Invarianten der Dyade. Vom mathematischen Standpunkt hat es großes Interesse, darnach zu fragen, welche aus den Elementen einer Dyade gebildeten Ausdrücke (also Funktionen dieser Elemente) ihren Wert beibehalten, wenn man die Elemente durch die Werte ersetzt, die nach einer Transformation des Bezugssystems an die Stelle der ursprünglichen Elemente treten. Hier soll die Frage nach den »Invarianten« nur, soweit sie für die Anwendungen von Bedeutung ist, behandelt werden.

Aus den Berechnungen in **7** und **8**, wie auch aus der ursprünglichen Definition der Motordyade geht hervor, daß das »erste Viertel« ihrer Matrix sich »in sich selbst« transformiert, und zwar genau so, wie die Matrix einer Vektordyade. Denn wenden wir etwa die Formel (34), die ein neues Element $P_{\iota\lambda}'$ durch die alten $P_{\iota\lambda}$ auszudrücken gestattet, auf ein Zahlenpaar $\iota\,\lambda$ an, das aus Zahlen zwischen 1 und 3 besteht, so zeigt sie, daß E'-Werte nur aus den ersten drei Zeilen von (33) zur Geltung kommen. Diese enthalten aber nur die Richtungskosinus $(x\,x')$, $(x\,y')$ usf. und sind überhaupt null, wenn nicht sowohl ϱ als $\varkappa + 3$ größer als 3 ist; dies bedeutet wieder, daß nur P-Werte, deren beide Indices zwischen 1 und 3 liegen, auf die ins Auge gefaßten P' von Einfluß sind. Wir haben somit zunächst die Invarianten des als Vektordyade aufgefaßten ersten Viertels

der ganzen Matrix zu betrachten, was uns auch mittelbar den Weg der weiteren Untersuchung weisen wird.

Um die Invarianten einer Vektordyade zu bestimmen, gehen wir von ihrer Definition aus, wonach jeder Richtung des Raumes durch eine bestimmte lineare Gl. (21) ein Vektor zugeordnet wird, und fragen nach solchen Richtungen ν, deren zugeordneter Vektor in die $+\nu$- oder $-\nu$-Richtung fällt. Bezeichnen wir seine Länge mit λ, die Elemente der Vektordyade gleich mit $P_{11}, P_{12} \dots P_{33}$, so müssen die Richtungskosinus der gesuchten Richtung ν den drei Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \lambda \cos(\nu x) &= P_{11}\cos(\nu x) + P_{21}\cos(\nu y) + P_{31}\cos(\nu z) \\ \lambda \cos(\nu y) &= P_{12}\cos(\nu x) + P_{22}\cos(\nu y) + P_{32}\cos(\nu z) \\ \lambda \cos(\nu z) &= P_{13}\cos(\nu x) + P_{23}\cos(\nu y) + P_{33}\cos(\nu z) \end{aligned}\right\} \quad \dots \quad (40)$$

genügen, die durch Komponenten-Zerlegung aus (2) hervorgehen. Damit diese Gleichungen, die in den Cosinus linear und homogen sind, eine Lösung besitzen, ist bekanntlich notwendig und hinreichend, daß die Determinante aus den Koeffizienten verschwindet. Dies liefert wieder eine Gleichung dritten Grades in λ:

$$\lambda^3 - A_1\lambda^2 + A_2\lambda - A_3 = 0 \quad \dots\dots\dots \quad (41),$$

durch deren 3 Koeffizienten A_1, A_2, A_3 die λ-Werte bestimmt werden. Da bei der Definition der λ das Koordinatensystem keinerlei Rolle spielte, müssen diese A Invarianten sein. Man rechnet leicht aus, daß A_1 die Summe der in der Hauptdiagonale stehenden Koeffizienten $P_{11} + P_{22} + P_{33}$, daß A_3 die ganze Determinante der P (bei nullgesetztem λ), endlich, daß P_2 die Summe der den Elementen der Hauptdiagonale adjungierten Unterdeterminanten ist. So erhält man also die drei Invarianten einer Vektordyade, zugleich aber auch einen Teil der Invarianten der Motordyade Π in der Form:

$$A_1 = P_{11} + P_{22} + P_{33}, \quad A_2 = \begin{vmatrix} P_{22} & P_{23} \\ P_{32} & P_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} P_{33} & P_{31} \\ P_{13} & P_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{vmatrix}, \quad A_3 = \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{vmatrix} \quad (42).$$

Wir können nun ganz denselben Gedanken anwenden, um weitere Invarianten der Motordyade zu finden. Um nicht auf die Einheitsschrauben zurückgehen zu müssen, legen wir die Gl. (14) zugrunde und fragen nach solchen Motoren $\mathfrak{M}$, deren zugeordneter $\mathfrak{M}'$ sich nur durch einen skalaren Faktor λ von $\mathfrak{M}$ unterscheidet. Setzen wir auf die linke Seite von (14) der Reihe nach $\lambda M_1, \lambda M_2 \dots \lambda M_6$, so entstehen sechs linear homogene Gleichungen für die M, deren Lösbarkeitsbedingung in der Determinantengleichung

$$\begin{vmatrix} P_{11} & P_{21} & P_{31} & P_{41}-\lambda & P_{51} & P_{61} \\ P_{12} & P_{22} & P_{32} & P_{42} & P_{52}-\lambda & P_{62} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} & P_{43} & P_{53} & P_{63}-\lambda \\ P_{14}-\lambda & P_{24} & P_{34} & P_{44} & P_{54} & P_{64} \\ P_{15} & P_{25}-\lambda & P_{35} & P_{45} & P_{55} & P_{65} \\ P_{16} & P_{26} & P_{36}-\lambda & P_{46} & P_{56} & P_{66} \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad . \quad (43)$$

zum Ausdruck kommt. Die sechs Koeffizienten in der Gleichung sechsten Grades für λ, die mit der vorstehenden identisch ist:

$$\lambda^6 - B_1\lambda^5 + B_2\lambda^4 - B_3\lambda^3 + B_4\lambda^2 - B_5\lambda + B_6 = 0 \quad \dots \quad (44)$$

sind unsere neuen Invarianten. Man erkennt ohne weiteres, daß B_6 die Determinante aus sämtlichen 36 Elementen P ist, B_1 die Summe der P, neben denen die λ stehen, B_2 die Summe gewisser Unterdeterminanten zweiter Ordnung, im ganzen

$$B_1 = \sum_\alpha P_{\alpha,\alpha+3}, \quad B_2 = \sum_{\alpha,\beta} \begin{vmatrix} P_{\alpha,\alpha+3} & P_{\alpha,\beta+3} \\ P_{\beta,\alpha+3} & P_{\beta,\beta+3} \end{vmatrix} \quad \dots\dots$$

$$B_5 = \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon} \begin{vmatrix} P_{\alpha,\alpha+3} & P_{\alpha,\beta+3} & \dots & P_{\alpha,\varepsilon+3} \\ P_{\beta,\alpha+3} & P_{\alpha,\beta+3} & \dots & P_{\beta,\varepsilon+3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{\varepsilon,\alpha+3} & P_{\varepsilon,\beta+3} & \dots & P_{\varepsilon,\varepsilon+4} \end{vmatrix}, \quad B_6 = \begin{vmatrix} P_{14} & P_{15} & \dots & P_{13} \\ P_{24} & P_{25} & \dots & P_{23} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{64} & P_{65} & \dots & P_{63} \end{vmatrix} \quad \dots \quad (45).$$

Die Summationsbuchstaben $\alpha, \beta \dots$ durchlaufen alle Kombinationen ohne Wiederholungen der Zahlen 1 bis 6, wobei, wie immer, Indices, die größer als 6 ausfallen, durch die um 6 verminderten zu ersetzen sind.

10. Symmetrische Dyaden. In den Anwendungen hat man es zumeist mit dem Fall symmetrischer Dyaden zu tun. Es werde also jetzt vorausgesetzt, daß die 36 Elemente der Matrix von Π den 15 Bedingungen $P_{\iota\varkappa} = P_{\varkappa\iota}$ genügen, daß also das Schema der Dyade symmetrisch bezüglich der Hauptdiagonale ist. Man kann dann zu den Invarianten (45) und ebenso zu (42) auch durch folgenden etwas veränderten Gedankengang gelangen. Bildet man das skalare Produkt eines Motors $\mathfrak{M}$ mit dem ihm durch die Dyade Π zugeordneten $\mathfrak{M}'$, so entsteht eine Form zweiten Grades in den Komponenten M_1 bis M_6, deren Koeffizienten die P sind. Subtrahiert man von dieser Form den Ausdruck $\lambda\,(M_1 M_4 + M_2 M_5 + \ldots M_6 M_3)$, dessen Wert nach I (3) von dem Bezugssystem unabhängig ist, so entsteht eine quadratische Form, deren Koeffizientenmatrix in (43) angeschrieben ist. Das Nullsetzen der Determinante liefert die λ-Werte, bei denen der positiv definite Charakter der Form verschwinden kann, stellt also eine gegen Koordinatenänderung invariante Beziehung dar; daher sind die Koeffizienten der Gl. (46) Invarianten. Man kann jetzt aber noch etwas weiter gehen und von der ursprünglichen Form auch noch $\lambda'(M_1{}^2 + M_2{}^2 + M_3{}^2)$ abziehen, d. i. λ' mal dem Quadrat der Länge der ersten Vektor-Komponente von $\mathfrak{M}$. Es treten dann in (43) anstelle von P_{44}, P_{55}, P_{66} die Differenzen $P_{44} - \lambda'$, $P_{55} - \lambda'$, $P_{66} - \lambda'$ und es entsteht durch Nullsetzen der Determinante eine Gleichung in λ, λ' von der Gestalt

$$\left.\begin{array}{l}\lambda^6 - B_1\lambda^5 + (B_2 - A_1\lambda')\lambda^4 - (B_3 + B_3'\lambda')\lambda^3 + (B_4 - \lambda' B_4' + A_2\lambda'^2)\lambda^2 \\ \quad -(B_5 - \lambda' B_5' + \lambda'^2 B_5'')\lambda + B_6 - B_6'\lambda' + B_6''\lambda'^2 - A_3\lambda'^3 = 0\end{array}\right\} \quad (46).$$

Die Koeffizienten A_1 bis A_3 und B_1 bis B_6 sind die in (42) bezw. (45) angegebenen, die anderen stellen sechs neue Invarianten dar, die sich ebenfalls als gewisse Determinantensummen rechnen lassen, z. B.

$$B_6'' = \sum_{\alpha} \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{1\alpha} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{2\alpha} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{3\alpha} \\ P_{\alpha 1} & P_{\alpha 2} & P_{\alpha 3} & P_{\alpha\alpha} \end{vmatrix}, \quad B_5'' = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \begin{vmatrix} P_{\alpha\gamma} & P_{\alpha\alpha} & P_{\alpha\beta} \\ P_{\beta\gamma} & P_{\beta\alpha} & P_{\beta\beta} \\ P_{\gamma+3,\gamma} & P_{\gamma+3,\alpha} & P_{\gamma+3,\beta} \end{vmatrix} \quad \text{usf.} \quad (47).$$

Für die α, β ... sind jetzt nur Kombinationen aus den Zahlen 1 bis 3 zu nehmen, im übrigen die oben gemachten Angaben zu berücksichtigen.

Zur Beurteilung der Frage, ob die in (42), (45) und (47) gegebenen Ausdrücke alle unabhängigen Invarianten, wenigstens für den symmetrischen Fall umfassen, führt die folgende Ueberlegung. Wir beweisen: Sind λ_1, λ_2 zwei verschiedene Wurzeln von (44), so sind die zugehörigen Motoren $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}''$, die durch die Gleichungen

$$\lambda_1\,\mathfrak{M}' = \Pi\cdot\mathfrak{M}', \quad \lambda_2\,\mathfrak{M}'' = \Pi\cdot\mathfrak{M}'' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (48)$$

definiert werden, zueinander orthogonal. Multipliziert man nämlich die erste der Gleichungen skalar mit $\mathfrak{M}''$, die zweite ebenso mit $\mathfrak{M}'$ und subtrahiert, so erhält man

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\,\mathfrak{M}'\cdot\mathfrak{M}'' = \mathfrak{M}''\,(\Pi\cdot\mathfrak{M}') - \mathfrak{M}'\,(\Pi\cdot\mathfrak{M}'').$$

Anwendung der Multiplikationsformel (13) zeigt, daß die $\varkappa$-te Komponente des in der ersten Klammer rechts stehenden Produktes die über ι erstreckte Summe von $P_{\iota+3,\varkappa}\,M_\iota'$ ist, also der erste Ausdruck rechts die Summe über ι und $\varkappa$ von $M_\varkappa''\,P_{\iota+3,\varkappa+3}\,M_\iota'$. Die Vertauschung von M' und M'', die zu dem zweiten Ausdruck der rechten Seite führt, ist hier gleichbedeutend mit der Vertauschung der Indices ι, $\varkappa$, die aber zufolge der Symmetrie $P_{\iota\varkappa} = P_{\varkappa\iota}$ an der Summe nichts ändert. Mithin sind beide Ausdrücke rechts gleich, mithin $\mathfrak{M}'\cdot\mathfrak{M}'' = 0$, w. z. b. w. Der Satz:

$$\mathfrak{A}\,(\Pi\cdot\mathfrak{B}) = \mathfrak{B}\,(\Pi\cdot\mathfrak{A}) \text{ bei symmetrischem } \Pi \quad \ldots\ldots \quad (49)$$

wird später auch unmittelbare Verwendung finden.

Wir wissen nun, daß — vom Fall mehrfacher Wurzeln von (44) abgesehen, der jedoch hier keine Schwierigkeiten bietet — die sechs Einheitsmotoren, die sich bei der durch die $P_{\iota\varkappa}$ bestimmten, linearen Transformation nur um Zahlenfaktoren $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_6$ ändern, paarweise zueinander orthogonal sind. Durch Angabe dieser Einheitsschrauben und der ihnen entsprechenden λ ist offenbar die ganze Transformation (als eine allgemeine »Affinität«) bestimmt. Nun besitzen sechs Einheitsschrauben 30 unabhängige Bestimmungsstücke; davon gehen ab $6\cdot 5/2 = 15$ Orthogonalitätsbedingungen und 6 Stücke, die die Lage des ganzen Systems (als eines starren Körpers) gegen das Koordinatenkreuz festlegen. Es bleiben somit 9 Größen, zuzüglich der 6 Wurzelwerte, im ganzen 15 Bestimmungstücke der linearen Transformation. Da wir nun in der Gl. (46) auch 15 Invarianten gefunden haben, dürfen wir annehmen, daß ihre Zahl damit erschöpft ist.

Eine Uebersicht über die möglichen Gestaltungen der durch symmetrische Dyaden bewirkten Transformation müßte von der Diskussion der Systeme von sechs orthogonalen Motoren ausgehen. Wenn wir dann statt eines Cartesischen Koordinatensystems ein solches »sechsfaches Rechtwinkelsystem« allgemeiner Form der Definition der Dyade zugrundelegen, so erhalten wir eine viel symmetrischere Darstellung. Es sei nur ein sehr spezieller Fall erwähnt, der, wie es scheint, in den Anwendungen vorzuherrschen scheint (Trägheitsdyade in II **3**, Elastizitätsdyade eines Stabes in III **4**). Hier haben die sechs Hauptmotoren zu je zweien die Kanten eines gewöhnlichen Rechtwinkelkreuzes zu Achsen; damit auch jedesmal die zwei koachsialen Motoren »orthogonal« sind, ist nach I **8** notwendig und hinreichend, daß sie entgegengesetzt gleiche Steigung haben. Nennen wir die Steigungen $\pm\alpha$, $\pm\beta$, $\pm\gamma$, so muß der Einheitsmotor mit den Komponenten 1, 0, 0, α, 0, 0 durch die Transformation in λ_1, 0, 0, $\lambda_1\alpha$, 0, 0 übergehen. Setzt man dies in (14) ein, so erhält man

$$\lambda_1 = P_{11}\alpha + P_{41},\quad 0 = P_{12}\alpha + P_{42} = P_{13}\alpha + P_{43},\quad \lambda_1\alpha = P_{14}\alpha + P_{44},\quad 0 = P_{15}\alpha + P_{45} = P_{16}\alpha + P_4$$

Die erste und vierte dieser Gleichungen zeigt wegen $P_{14} = P_{41}$, daß $P_{44} = P_{11}\alpha^2$ sein muß, während aus den anderen, da sie auch für $-\alpha$ bestehen müssen $P_{12} = P_{13} = P_{15} = P_{16} = P_{42} = P_{43} = P_{45} = P_{46} = 0$ folgt. Stellt man die gleiche Ueberlegung für die beiden anderen Achsen an, so findet man, daß die Matrix der von uns betrachteten, wie wir sagen wollen »vollsymmetrischen« Dyade, auf das Hauptachsenkreuz bezogen, so aussieht:

$$\begin{matrix} P_{11} & 0 & 0 & P_{14} & 0 & 0 \\ 0 & P_{22} & 0 & 0 & P_{25} & 0 \\ 0 & 0 & P_{33} & 0 & 0 & P_{36} \\ P_{14} & 0 & 0 & \alpha^2 P_{11} & 0 & 0 \\ 0 & P_{25} & 0 & 0 & \beta^2 P_{22} & 0 \\ 0 & 0 & P_{36} & 0 & 0 & \gamma^2 P_{33}, \end{matrix}$$

d. h. sie enthält nur in der Hauptdiagonale und den beiden parallelen »Halbdiagonalen« nicht verschwindende Elemente. Die λ-Gleichung nach (46) ist leicht aufzulösen, sie liefert, wenn wir wieder P_{44} statt $\alpha^2 P_{11}$ usf. schreiben:

$$\lambda_1, \lambda_2 = P_{14} \pm \sqrt{P_{11}\cdot P_{44}}\,,\quad \lambda_3, \lambda_4 = P_{25} \pm \sqrt{P_{22}\cdot P_{55}}\,,\quad \lambda_5, \lambda_6 = P_{36} \pm \sqrt{P_{33}\cdot P_{66}}\,.$$

Man sieht, daß — anders als im Falle der Vektorrechnung — aus der Symmetrie der Dyade nicht auf die Realität der λ geschlossen werden kann.

Wir wollen nun eine Reihe von Anwendungen der hier vorgeführten Begriffsbildungen und Formeln auf Aufgben aus der Mechanik starrer Körper, aus der Elastizitätstheorie und der Hydromechanik ausführlich betrachten[1]). 395

KLEINE MITTEILUNGEN

Ueber die Drillungssteifigkeit zylindrischer Stäbe.[2]) Es scheint bis jetzt unbeachtet geblieben zu sein, daß die Drillungssteifigkeit C eines zylindrischen Stabes stets der Ungleichung

$$C \leq \frac{2}{(1+\sigma)}\frac{A\,B}{(A+B)}$$

genügt, wo A und B die Hauptbiegungsteifigkeiten (Widerstandsmomente in den Hauptbiegungs-Richtungen) desselben Stabes und σ die Poissonsche Konstante bedeuten. Es soll hier eine Ableitung dieses Satzes gegeben werden.

Wir bemerken, daß die rechte Seite obiger Ungleichung nichts anderes ist, als die Drillungssteifigkeit eines zylindrischen Stabes von elliptischer Querschnittsform mit den Hauptbiegungssteifigkeiten A und B. Der zu beweisende Satz lautet also: unter allen zylindrischen Stäben mit den gegebenen Hauptbiegungssteifigkeiten A und B besitzt der Stab von elliptischer Querschnittsform die größte Drillungssteifigkeit.

Wir wählen die Hauptträgheitsachsen des Stabquerschnittes in dessen Schwerpunkte als die x- und y-Achsen. Dann wird die Drillungssteifigkeit C des Stabes durch die Formel

$$C = \mu \iint \left(x^2 + y^2 + x\frac{\partial\varphi}{\partial y} - y\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) dx\,dy\,. \quad (1)$$

bestimmt, wo μ den Schubmodul bedeutet und φ eine Funktion von x und y ist, die im Inneren des Querschnittes der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

[1]) Der Abschnitt III erscheint im nächsten Heft.

[2]) Der hier mitgeteilte Satz wurde vom Verfasser in einer russischen Schrift »Ueber die räumliche Elastica« (Petrograd, 1916) abgeleitet.

und auf dessen Rande der Randbedingung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = y \cos(n,x) - x \cos(n,y) \quad . \; . \; . \; (3)$$

(n Richtung der äußeren Randkurvennormale) genügt; das Doppelintegral in obiger Formel ist auf die Querschnittsfläche auszudehnen.

Nun wollen wir statt φ eine neue Funktion ψ mittelst der Substitution

$$\varphi = \frac{A-B}{A+B} x y + \psi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

einführen. Beachtet man, daß

$$A = E \iint y^2 \, dx \, dy, \quad B = E \iint x^2 \, dx \, dy,$$

$$\frac{4\mu}{E} = \frac{2}{1+\sigma}$$

(E Elastizitätsmodul), und setzt den Wert von φ aus (4) in (1) ein, so ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} C = & \frac{2}{(1+\sigma)} \frac{AB}{(A+B)} \\ & + \mu \iint \left(x \frac{\partial \psi}{\partial y} - y \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dx \, dy \end{aligned} \right\} \quad . \; . \; . \; (5).$$

Nun ist aber das Doppelintegral in dieser Formel stets eine negative Größe (mit Ausnahme des Falles eines elliptischen Querschnittes, wo $\psi = 0$ und das Doppelintegral gleich Null wird). Es läßt sich nämlich zeigen, daß

$$\left. \begin{aligned} & \iint \left(x \frac{\partial \psi}{\partial y} - y \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dx \, dy \\ & = - \iint \left\{ \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right\} dx \, dy \end{aligned} \right\} \quad . \; . \; (6)$$

ist.

In der Tat, setzt man den Wert von φ aus (4) in (2) und (3) ein, so gewinnt man die Differentialgleichung und Randbedingung, denen die Funktion ψ genügen muß; sie lauten

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7),$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = \frac{2}{A+B} \{ B y \cos(n,x) - A x \cos(n,y) \} \quad (8).$$

Bezeichnen wir mit ds das Bogenelement der Randkurve, so ergibt sich aus (7) und (8):

$$\begin{aligned} \iint \left\{ \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right\} dx \, dy & = \int \psi \frac{\partial \psi}{\partial n} ds \\ & = \frac{2}{A+B} \int \psi \{ B y \cos(n,x) - A x \cos(n,y) \} ds \\ & = \frac{2}{A+B} \iint \left\{ B y \frac{\partial \psi}{\partial x} - A x \frac{\partial \psi}{\partial y} \right\} dx \, dy . \end{aligned}$$

Dieses Resultat läßt sich auch schreiben

$$\left. \begin{aligned} & \iint \left\{ \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right\} dx \, dy \\ & = \iint \left(y \frac{\partial \psi}{\partial x} - x \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dx \, dy \\ & + \frac{B-A}{A+B} \iint \left(y \frac{\partial \psi}{\partial x} + x \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dx \, dy \end{aligned} \right\} \quad . \; (9).$$

Nun folgt aber wieder aus (7) und (8)

$$\begin{aligned} \iint \left(y \frac{\partial \psi}{\partial x} + x \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dx \, dy & = \int x y \frac{\partial \psi}{\partial n} ds \\ & = \frac{2}{A+B} \int x y \{ B y \cos(n,x) - A x \cos(n,y) \} ds \\ & = \frac{2}{A+B} \iint (B y^2 - A x^2) \, dx \, dy = 0 \end{aligned}$$

und daher aus (9) die Gl. (6). Damit ist aber die oben angekündigte Ungleichung

$$C \leqq \frac{2}{(1+\sigma)} \frac{AB}{(A+B)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (10)$$

bewiesen.

Es seien an den soeben aufgestellten Satz noch einige Bemerkungen angeknüpft.

Zunächst ist klar, daß der Satz auch auf Hohlquerschnitte ohne weiteres übertragbar ist. Auch in diesem Falle gilt die Ungleichung (10); sie besagt, daß unter allen Hohlquerschnitten, die den gegebenen Hauptbiegungssteifigkeiten A und B entsprechen, der von zwei ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipsen begrenzte Querschnitt die größte Drillungssteifigkeit aufweist.

Die Größen A, B, C spielen eine Rolle in der Theorie der räumlichen Elastica. In **Kirchhoffs** kinetischer Analogie entsprechen ihnen die Hauptträgheitsmomente des um einen Punkt rotierenden schweren starren Körpers. Nun können die Hauptträgheitsmomente eines starren Körpers sehr wohl solche Werte annehmen, die der Ungleichung (10) nicht genügen. Somit ist nicht jede Lösung des kinetischen Problems auf die Elastica ohne weiteres übertragbar. Für eine Reihe bisher bekannter Lösungen des Rotationsproblems (so z. B. für die von Sonja Kowalewski herrührende Lösung) wird gerade die Bedingung (10) nicht befriedigt; in diesen Fällen scheitert also die kinetische Analogie.

In einer kürzlich erschienenen Abhandlung über das kritische Drillungsmoment von Wellen macht Hr. R. Grammel[1]) einige Bemerkungen über die Größenverhältnisse der Biegungs- und Drillungssteifigkeiten zylindrischer Stäbe. Eine Zusammenfassung der Ergebnisse, die sich auf die Drillungssteifigkeit für verschiedene bis jetzt untersuchte Querschnittsformen beziehen, hat Hrn. Grammel unter anderem zu der Vermutung veranlaßt, daß für alle Querschnitte $C < 2B$ sei, wo B die kleinere der beiden Hauptbiegungssteifigkeiten ist. Daß diese Behauptung richtig ist, folgt nun unmittelbar aus dem oben aufgestellten Satze. Zugleich sieht man, daß die von Hrn. Grammel angegebene Ungleichung sich stets verschärfen läßt. 378

Petersburg, Polytechnisches Institut.
28. Dezember 1923. E. Nicolai.

[1]) R. Grammel: Das kritische Drillungsmoment von Wellen. Diese Zeitschr. Bd. 3, 1923, S. 267. Hier werden die Größen A, B, C mit α, β, γ bezeichnet.

Wovon hängt die Selbstzentrierung einer biegsamen Welle ab? Eine biegsame Welle von kreisförmigem Querschnitt nimmt für jede Rotationsgeschwindigkeit ω eine Gleichgewichtslage an, die stabil ist, welchen Wert ω auch haben mag, und deren Durchbiegung mit der Umlaufsgeschwindigkeit wächst, so lange ω kleiner als die Eigenfrequenz ν der Welle ist, mit ihr aber abnimmt, wenn $\omega > \nu$ ist. Auf dieser letzteren Eigenschaft beruht bekanntlich die Selbstzentrierung einer biegsamen Welle[1]). Nur für den Fall $\omega = \nu$ (Resonanz) wird bei Vernachlässigung von Energieverlusten die Durchbiegung unendlich groß. Dieser singuläre Zustand ist also als instabil anzusehen.

Ganz anders werden die Verhältnisse, wenn wir einen Freiheitsgrad unterdrücken, indem wir der Achse nur die Möglichkeit lassen, sich in e i n e r Richtung durchzubiegen, sei es, daß wir ihr eine (mitrotierende) Führung geben, sei es, daß der Querschnitt der Achse so stark von der Kreisform abweicht, daß die Durchbiegung in der einen Richtung praktisch unmöglich ist[2]). In diesem Falle eines Freiheitsgrades ist nämlich die zu einer bestimmten Umlaufsgeschwindigkeit ω gehörige Durchbiegung stabil und wächst mit ω, wenn $\omega < \nu$, labil, wenn $\omega > \nu$, während bei zwei Freiheitsgraden, wie schon erwähnt, stets Stabilität vorhanden ist.

Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist, nach dem Grunde dieses verschiedenen Verhaltens zu fragen. Man könnte vermuten, daß die Labilität auf der Unterdrückung eines Freiheitsgrades beruht, ähnlich wie beim Kreisel, dessen stabilisierende Fähigkeit davon abhängt, daß die Kreiselachse zwei Freiheitsgrade hat, und der sie sofort verliert, wenn man einen Freiheitsgrad unterdrückt[3]). Wie wir sehen werden, ist der Grund bei der biegsamen Welle ein anderer. Um das zu erkennen, behandeln wir zunächst den Fall eines, dann den zweier Freiheitsgrade, und schließlich, um von diesem zu jenem überzugehen, eine nicht kreisförmige Welle, die also zwei Eigenfrequenzen hat. Läßt man die eine der beiden Eigenfrequenzen immer größer und schließlich unendlich werden, so erhält man in der Grenze Starrheit in der einen Richtung, d. h. Unterdrückung dieses Freiheitsgrades.

1. Ein Freiheitsgrad.

Mit K l e i n und S o m m e r f e l d können wir die biegsame Welle für unser Problem dahin idealisieren, daß wir sie durch einen Massenpunkt m ersetzen, der aus Symmetriegründen in der ξ-η-Ebene festgehalten wird und in dieser mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um einen festen Punkt 0 umläuft, seine Gleichgewichtslage aber in einem Punkte C hat, in die er mit einer Kraft hingezogen wird, die proportional dem Abstande des Punktes m von C ist.

Führen wir anstatt des im Raume festen Achsenkreuzes ξ, η das mit der Winkelgeschwindigkeit ω umlaufende System x, y ein, welches im betrachteten Augenblicke mit jenem zusammenfallen möge, so gilt[4])

$$\left.\begin{aligned}\ddot{\xi} &= \ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x \\ \ddot{\eta} &= \ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (1).$$

Ist im Falle eines Freiheitsgrades dauernd $y = 0$, so wird, wenn $x = c_1$, $y = c_2$ die Koordinaten von C sind,

$$\ddot{x} - \omega^2 x = -\nu^2 (x - c_1) \quad . \; . \; . \; . \; (2),$$

die Bewegungsgleichung, die durch die Substitution

$$u = x - \frac{C_1}{1 - \frac{\omega^2}{\nu^2}} \; (3) \quad \text{in} \quad \ddot{u} + (\nu^2 - \omega^2)\, u = 0 \quad (4)$$

übergeht.

Die Integration von (4) liefert mit Benutzung von (3) für $\nu > \omega$:

$$x = \frac{C_1}{1 - \frac{\omega^2}{\nu^2}} + A \cos\left(\sqrt{\nu^2 - \omega^2}\, t - \alpha\right) \quad (5\,\text{a});$$

für $\nu < \omega$:

$$x = \frac{C_1}{1 - \frac{\omega^2}{\nu^2}} + K_1 e^{\sqrt{\omega^2 - \nu^2}\, t} + K_2 e^{-\sqrt{\omega^2 - \nu^2}\, t} \quad (5\,\text{b}).$$

Die Gleichungen (5) bestätigen also unsere obige Behauptung, daß der Massenpunkt eine Gleichgewichtslage, und zwar im Abstande $C_1 / \left(1 - \frac{\omega^2}{\nu^2}\right)$ von der Rotationsachse besitzt, daß diese aber nur für $\nu > \omega$ stabil, dagegen für $\nu < \omega$ labil ist.

2. Zwei Freiheitsgrade einer Welle von kreisförmigem Querschnitt.

Im Falle einer nach allen Seiten frei beweglichen kreisförmigen Welle lauten die Bewegungsgleichungen nach (1)

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x &= -\nu^2 (x - c_1) \\ \ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y &= -\nu^2 (y - c_2)\end{aligned}\right\} \; . \; . \; (6).$$

Setzen wir

$$u = x - \frac{C_1}{1 - \frac{\omega^2}{\nu^2}}; \qquad v = y - \frac{C_2}{1 - \frac{\omega^2}{\nu^2}} \; . \; . \; (7),$$

so wird aus (6)

$$\left.\begin{aligned}\ddot{u} - 2\omega\dot{v} + (\nu^2 - \omega^2)\, u &= 0 \\ \ddot{v} + 2\omega\dot{u} + (\nu^2 - \omega^2)\, v &= 0\end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; (8).$$

Der Ansatz

$$u = A e^{izt}; \qquad v = B e^{izt} \; . \; . \; . \; . \; (9),$$

---

[1]) Siehe z. B. F. K l e i n und A. S o m m e r f e l d, Ueber die Theorie des Kreisels 4, Leipzig 1910, S. 884.

[2]) Aus praktischen Gründen könnte man im letzten Falle natürlich der Axe, soweit sie in den Lagern läuft, trotzdem kreisförmigen Querschnitt lassen.

[3]) Siehe z. B. F. K l e i n und A. S o m m e r f e l d, Ueber die Theorie des Kreisels 4, Leipzig 1910, S. 767.

[4]) Siehe z. B. G. K i r c h h o f f, Vorlesungen über Mechanik, 4. Aufl., Leipzig 1897, S. 87.

liefert

$$\left.\begin{aligned}(\nu^2-\omega^2-z^2)\,A &= 2\,i\,\omega z\,B\\(\nu^2-\omega^2-z^2)\,B &= -\,2\,i\,\omega z\,A\end{aligned}\right\}\quad(10).$$

Durch Multiplikation der linken und rechten Seiten von (10) ergibt sich die Frequenzbedingung

$$(\nu^2-\omega^2-z^2)^2 = 4\,\omega^2 z^2\ \ldots\ldots\ (11),$$

durch Division die Gleichung des Amplitudenverhältnisses

$$\left(\frac{B}{A}\right)^2 = -1\ \ldots\ldots\ (11').$$

Aus (11) folgt

$$z_1 = \nu + \omega;\qquad z_2 = \nu - \omega\ \ldots\ (12)$$

und durch Einsetzen dieser Werte in irgendeine der beiden Gleichungen (10)[1])

$$\left(\frac{B}{A}\right)_1 = +\,i;\qquad \left(\frac{B}{A}\right)_2 = -\,i\ \ldots\ (13).$$

so daß wir mit Benutzung von (7) das Resultat erhalten

$$\left.\begin{aligned}x &= \frac{C_1}{1-\frac{\omega^2}{\nu^2}} + A_1\cos\left[(\nu+\omega)\,t+\alpha_1\right] + A_2\cos\left[(\nu-\omega)\,t+\alpha_2\right]\\ y &= \frac{C_2}{1-\frac{\omega^2}{\nu^2}} - A_1\sin\left[(\nu+\omega)\,t+\alpha_1\right] + A_2\sin\left[(\nu-\omega)\,t+\alpha_2\right]\end{aligned}\right\}\ (14).$$

Wir erkennen aus diesen Gleichungen die Stabilität der Gleichgewichtslage für jeden Wert von ω und die Selbstzentrierung, wenn $\omega \gg \nu$.

3. Die Welle von nicht kreisförmigem Querschnitt.

Ist der Querschnitt der Welle nicht kreisförmig, so existieren zwei voneinander verschiedene Eigenfrequenzen ν_1 und ν_2 in den Richtungen x und y, so daß die Bewegungsgleichungen lauten

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x} - 2\,\omega\,\dot{y} - \omega^2 x &= -\,\nu_1^2\,(x-c_1)\\ \ddot{y} + 2\,\omega\,\dot{x} - \omega^2 y &= -\,\nu_2^2\,(y-c_2)\end{aligned}\right\}\ (15),$$

die durch die Substitutionen

$$u = x - \frac{C_1}{1-\frac{\omega^2}{\nu_1^2}};\qquad v = y - \frac{C_2}{1-\frac{\omega^2}{\nu_2^2}}\ \ldots\ (16),$$

in

$$\left.\begin{aligned}\ddot{u} - 2\,\omega\,\dot{v} + (\nu_1^2-\omega^2)\,u &= 0\\ \ddot{v} + 2\,\omega\,\dot{u} + (\nu_2^2-\omega^2)\,v &= 0\end{aligned}\right\}\ \ldots\ (17)$$

übergehen.

Durch den Ansatz

$$u = A e^{izt};\qquad v = B e^{izt}\ \ldots\ (18)$$

ergibt sich

$$\left.\begin{aligned}(\nu_1^2-\omega^2-z^2)\,A &= 2\,i\,\omega z\,B\\ (\nu_2^2-\omega^2-z^2)\,B &= -\,2\,i\,\omega z\,A\end{aligned}\right\}\ \ldots\ (19),$$

oder durch Multiplikation resp. Division die Frequenzen- und Amplitudengleichung

$$(\nu_1^2-\omega^2-z^2)\,(\nu_2^2-\omega^2-z^2) = 4\,\omega^2 z^2\quad(20);$$

$$\left(\frac{B}{A}\right)^2 = -\,\frac{\nu_1^2-\omega^2-z^2}{\nu_2^2-\omega^2-z^2}\ \ldots\ (20').$$

Aus (20) folgt

$$\left.\begin{aligned}z^2 &= \frac{\nu_1^2+\nu_2^2+2\,\omega^2}{2}\\ &\pm\sqrt{\left(\frac{\nu_1^2+\nu_2^2+2\omega^2}{2}\right)^2-(\nu_1^2-\omega^2)(\nu_2^2-\omega^2)}\end{aligned}\right\}\ (21).$$

Der Radikand ist stets positiv. Damit das Gleichgewicht stabil ist, müssen beide Werte von z reell, d. h. die von z^2 positiv sein. Das ist der Fall für

$$(\nu_1^2-\omega^2)\,(\nu_2^2-\omega^2) > 0\ \ldots\ (22),$$

$$\left.\begin{aligned}&\text{d. h. erstens für}\quad \nu_1>\omega;\ \nu_2>\omega\\ &\text{zweitens für}\quad \nu_1<\omega;\ \nu_2<\omega\end{aligned}\right\}\ \ldots\ (23).$$

Ist dagegen

$$\nu_1 > \omega;\ \nu_2 < \omega\quad\text{oder}\quad \nu_1<\omega;\ \nu_2>\omega\quad(24),$$

so ist das Gleichgewicht labil.

In Worten: Das Gleichgewicht ist nur dann stabil, wenn die Winkelgeschwindigkeit nicht zwischen den beiden Eigenfrequenzen liegt. Lassen wir nun ν_2 ins Unendliche wachsen, d. h. nehmen wir der Welle einen Freiheitsgrad, so wird das Gleichgewicht nach (23) nur für $\omega < \nu_1$ stabil, wie wir bereits in 1. gefunden hatten. Wir erkennen aber auch gleichzeitig, daß wir die Welle nur dann als starr in einer Richtung ansehen können, wenn ihre Eigenfrequenz in dieser Richtung groß gegen die Winkelgeschwindigkeit der Rotation ist. Die Labilität des Gleichgewichts bei einem Freiheitsgrad und $\omega > \nu$ wird also nicht durch Unterdrückung des anderen Freiheitsgrades hervorgerufen, wie beim Kreisel, sondern hat seinen Grund in der zu großen Eigenfrequenz des praktisch unterdrückten Freiheitsgrades.

La Plata, Januar 1923.
Instituto de Física. 280
Richard Gans und Ramón G. Loyarte.

Ueber einen hydrodynamischen Versuch von Joukowsky. In seinem Buche »Aérodynamique« (Paris 1916) beschreibt Joukowsky (S. 45) einen Versuch, durch den gezeigt werden soll, daß der Widerstand eines Körpers in turbulenter Strömung größer ist als in turbulenzfreier Strömung. Der Versuchskörper war in diesem Falle eine ebene runde Scheibe, welche senkrecht von der Strömung getroffen wurde. Dieses Ergebnis steht in Widerspruch mit Windkanalmessungen, welche bei gewissen Körperformen (z. B. Kugeln, Ellipsoide, Ballonmodelle) gerade das Gegenteil, nämlich eine Abnahme des Widerstandes in der turbulenten Strömung oder bei anderen Körpern (z. B. Scheiben und Körper mit Kanten senkrecht zur Strömung) einen von der Turbulenz unabhängigen Widerstand aufweisen[1]). Eine Vergrößerung des Widerstandes ist bisher im Windkanal nicht festgestellt worden. Es ist daher von Interesse, den Ursachen dieser Unstimmigkeit etwas nachzugehen.

---

[1]) Durch Einsetzen von (12) in (10) erhält man B/A eindeutig, während (11') zwei Vorzeichen zulassen würde.

[1]) Vergl. L. Prandtl, Der Luftwiderstand von Kugeln. Nachr. d. K. Gesells. der Wiss. z. Göttingen, Math. phys. Kl. 1914. — C. Wieselsberger, Zeitschr. f. Flugt. u. Motorl. 1914, S. 140.

Die von **Joukowsky** benützte Versuchsanordnung war folgende (Abb. 1): An den Enden eines gleicharmigen Waghebels sind an Fäden zwei gleich große runde Scheiben D und E aufgehängt und die Wage austariert.

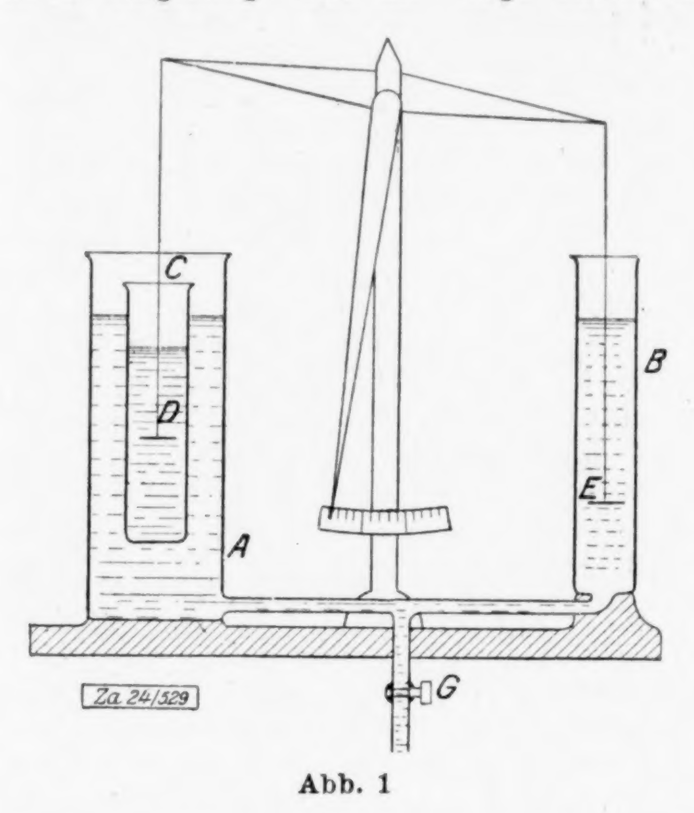


Abb. 1

Beide Scheiben tauchen in zylindrische Gefäße C und B, von denen das linke in einem größeren Gefäße A schwimmt. Die Gefäße A und B sind durch eine Leitung, die einen Abflußhahn G enthält, miteinander verbunden. **Joukowsky** sagt nun so: Oeffnet man den Hahn G, so senken sich die Flüssigkeitsspiegel in A, C und B mit der gleichen Geschwindigkeit. Die relative Geschwindigkeit gegen die beiden Scheiben D und E ist also die gleiche. Ein Unterschied zwischen den beiden Strömungen besteht aber darin, daß die Strömung gegen die linke Scheibe vollkommen gleichmäßig und turbulenzfrei ist, weil sich die Flüssigkeit relativ zur Wand nicht bewegt, während im rechten Zylinder B die Strömung wegen der Reibung an der Gefäßwand turbulent ist. Man beobachtet nun, daß sich die Scheibe E senkt, also einen größeren Widerstand als die Scheibe D erfährt. Die Ursache für diesen größeren Widerstand ist die Turbulenz in B.

Zur Aufklärung des nun bestehenden Widerspruches wollen wir die Vorgänge in den beiden Gefäßen näher ins Auge fassen. Die Verhältnisse im linken Gefäß liegen einfach. Das Gefäß C senkt sich nach Oeffnung des Hahnes mit der gleichen Geschwindigkeit wie der Flüssigkeitsspiegel in A. Mit derselben Geschwindigkeit bewegt sich die Flüssigkeit in C gegen die Scheibe D. Nicht so einfach sind die Vorgänge, die sich in dem Gefäße B abspielen. Hier haben wir es mit einer Flüssigkeitsströmung in einem Rohre zu tun. Natürlich senkt sich auch hier der Flüssigkeitsspiegel mit der gleichen Geschwindigkeit wie links, aber wesentlich ist hier vor allem, wie groß die Geschwindigkeit am Orte der Scheibe E ist. Wir dürfen nicht annehmen, daß diese über den ganzen Querschnitt konstant gleich der Spiegelsenkungsgeschwindigkeit ist. Dies wird nur im ersten Moment nach Oeffnung des Hahnes der Fall sein. Die Verhältnisse liegen ähnlich wie beim Eintritt von Flüssigkeit aus einem großen Behälter in ein Rohr. In diesem Falle ist nach den Untersuchungen von L. **Schiller**[2]) die Geschwindigkeitsverteilung am Eintritt zwar gleichförmig, nach einer gewissen Strecke aber — »Anlaufstrecke« — macht sich die Wirkung der Wandreibung mehr und mehr bemerkbar und schließlich bildet sich, falls sich der ganze Vorgang unterhalb der kritischen **Reynolds**schen Zahl abspielt, die der laminaren Strömung charakteristische parabolische Verteilung aus[3]). In unserem Falle, wo die Bewegung aus der Ruhe heraus erfolgt, wird zwar auch im ersten Moment die Verteilung gleichförmig sein, nachdem sich aber der Spiegel mehr und mehr senkt, wird sich durch die Wirkung der Wandreibung am Orte der Scheibe E eine Verteilung etwa von der in Abb. 2 skizzierten Form ausbilden,

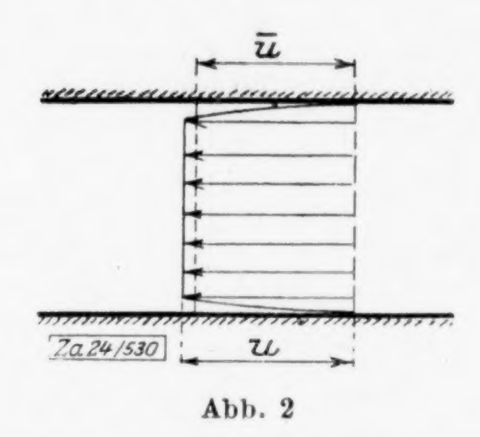


Abb. 2

wobei die Geschwindigkeit u in der Mitte größer ist als die mittlere Geschwindigkeit u, die ihrerseits (wegen der Kontinuität) gleich der Spiegelsenkungsgeschwindigkeit ist. Die volle parabolische Verteilung kann sich wegen der Kürze der Zeit nicht ausbilden, wir haben hier nur das Anfangsstadium. Die **Joukowsky**sche Beobachtung läßt sich daher so erklären, daß sich die Scheibe E in einer Strömung befindet, deren Geschwindigkeit größer ist als die Geschwindigkeit, mit der sich die Flüssigkeitsspiegel senken. Sie muß daher einen größeren Widerstand erfahren als die Scheibe D. In dem Zylinder B wird die in der Nähe des Randes zurückbleibende Flüssigkeit an der Oberfläche radial nach der Mitte zu strömen.

Die quantitative Bestimmung des Geschwindigkeitsüberschusses bei E läßt sich nicht genau durchführen, da die Dimensionen des von **Joukowsky** verwendeten Apparates nicht angegeben sind. Begnügt man sich mit einer rohen Annäherung, indem man die Dimensio-

---

[2]) L. Schiller, Die Entwicklung der laminaren Geschwindigkeitsverteilung. Diese Zeitschr. 1922, S. 96.

[3]) Auch in dem Fall überkrit. Geschw. bleiben die Betrachtungen qualitativ gültig, da auch hier am Rand eine Schicht mit verzögerter Geschw. vorhanden ist.

nen schätzungsweise annimmt (Zylinderhöhe etwa 50 cm, Zylinderdurchmesser 10 cm, im übrigen die Proportionen entsprechend Abb. 1), so läßt sich auf Grund der Schillerschen Ergebnisse der Geschwindigkeitsüberschuß leicht bestimmen. Unter diesen Annahmen ergibt sich, daß die Geschwindigkeit, welche die Scheibe E trifft, um mehr als 10 vH größer ist als die Geschwindigkeit, welcher die Scheibe D ausgesetzt ist.

Man ersieht daraus, daß der größere Widerstand der Scheibe E durch die besondere Art der Geschwindigkeitsverteilung in dem Gefäße B erklärt werden kann. 372

Tokio, Japan. C. Wieselsberger.

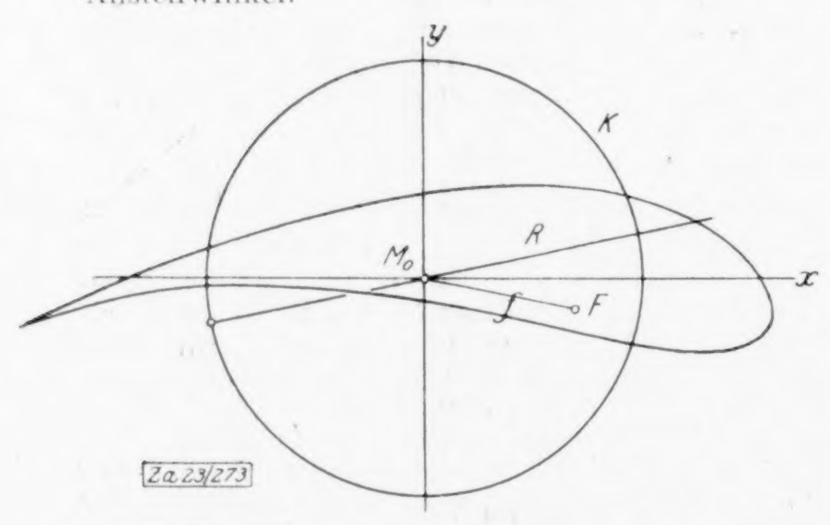
Zur Theorie der Misesschen Profilachsen. 1. Das äußere Gebiet z eines ebenen, etwa als Tragflügelquerschnitt gedachten Profils wird durch eine Funktion von der Form

$$z = \zeta + \frac{c_1}{\zeta} + \frac{c_2'}{\zeta^2} + \frac{c_3'}{\zeta^3} + \ldots\ldots \quad (1)$$

auf das schlichte Aeußere ζ des Grundkreises K konform abgebildet. Wenn wir den Mittelpunkt M_0 dieses Kreises zum Anfangspunkt machen, so geht (1) über in

$$z = \zeta + \frac{c_1}{\zeta} + \frac{c_2}{\zeta^2} + \ldots\ldots\ldots \quad (2),$$

der Koeffizient c_1 ist eine von der Lage des Anfangspunktes unabhängige, im allgemeinen komplexe Größe $d^2 e^{2i\gamma}$, die daher eine invariante Eigenschaft des Profils zum Ausdruck bringt. Dreht man das Achsensystem im positiven Sinne um die halbe Amplitude γ, so fällt die reelle Achse mit der Richtung der »II. Profilachse« zusammen. Dann ist c_1 reell und gleich dem Produkt aus dem Radius R des Grundkreises und dem Abstand f des Brennpunktes F von M_0[1]). Diese von Mises eingeführte II. Achse spielt für die in der Tragflügeltheorie benutzten Profilformen, wenn man sie etwa durch den Spurpunkt der Hinterkante (Eckpunkt des Profils) gezogen denkt, die Rolle der natürlichen Längsachse, zugleich der natürlichen Nullage für die Zählung der Anstellwinkel.



[1]) Vergl. v. Mises, Zeitschr. f. Flugtechnik u. Motorluftschiffahrt 8, 1917, S. 157 bis 163; 11, 1920, S. 68 bis 73 u. 87 bis 89. Wilh. Müller, diese Zeitschr. 3, 1923, S. 117 bis 128.

Es ist nun interessant, die Bedeutung der parallel zu dieser Achsenrichtung durch den Mittelpunkt M_0 gezogenen Geraden im Anschluß an die von Frank und Löwner[2]) benutzte mechanisch-geometrische Definition des Mittelpunktes M_0 weiter zu verfolgen.

Denken wir uns die Berandung des Grundkreises gleichmäßig mit Masse von der Dichte 1 belegt und übertragen wir diese Belegung so auf den Profilrand, daß die Massen der vermöge (2) entsprechender Bogenelemente einander gleich sind, so hat M_0 die Bedeutung des Schwerpunktes für die Profilberandung. Ich werde diese Art der Massenbelegung einfach als konforme Belegung bezeichnen und alle damit in Verbindung stehenden mechanischen Begriffe entsprechend charakterisieren.

2. Wir bestimmen zunächst das Deviationsmoment der konformen Belegung des Profilrandes für eine durch den konformen Schwerpunkt gehende Gerade, die mit der II. Achse als reelle Achse den Winkel λ bildet.

Wenn wir für die Punkte des Grundkreises $\zeta = Re^{i\psi}$ und für die Punkte des Profils $z = re^{i\varphi}$ setzen, so haben wir folgendes Integral zu bilden:

$$\Pi_\lambda = R\int_0^{2\pi} r\cos(\varphi-\lambda)\sin(\varphi-\lambda)\,d\psi.$$

Der Ausdruck unter dem Integralzeichen ist aber der Koeffizient von i oder kurz der imaginäre Bestandteil in dem komplexen Ausdruck

$$\tfrac{1}{2} r^2 e^{2i(\varphi-\lambda)} = \tfrac{1}{2} r^2 e^{2i\varphi} e^{-2i\lambda}$$

und Π_λ wird mit leicht verständlicher Bezeichnung

$$\Pi_\lambda = \tfrac{1}{2} R\,\Im\left[\int_0^{2\pi} z^2 e^{-2i\lambda}\,d\psi\right].$$

Setzen wir nun für z den Ausdruck (2) ein, so wird mit $d\psi = \frac{d\zeta}{i\zeta}$

$$\Pi_\lambda = \tfrac{1}{2} R\,\Im\left[\oint\left(\zeta + \frac{c_1}{\zeta} + \frac{c_2}{\zeta^2} + \ldots\right)^2 e^{-2i\lambda}\frac{d\zeta}{i\zeta}\right]$$

(das Integral erstreckt sich längs der Peripherie des Kreises K).

Nach dem Residuensatz erhalten wir

$$\Pi_\lambda = -2\pi R c_1 \sin 2\lambda = -2\pi R^2 f \sin 2\lambda \quad (3).$$

Da Π_λ verschwindet für $\lambda = 0$ und $\lambda = \frac{\pi}{2}$, so ergibt sich ohne weiteres, daß die II. Achse und ihre Senkrechte durch M_0 die Bedeutung von Hauptträgheitsachsen in bezug auf den konform belegten Profilrand haben.

3. Um die konformen Hauptträgheitsmomente Θ_x und Θ_y in bezug auf diese Achsen zu berechnen, ist es am zweckmäßigsten, vom »polaren« Trägheitsmoment

[2]) Math. Zeitschr. 3, 1919, S. 78 bis 86.

$\Theta_0 = \Theta_x + \Theta_y$ auszugehen und die weitere bekannte Gleichung

$$H_\lambda = (\Theta_y - \Theta_x) \sin\lambda \cos\lambda,$$

die durch (3) in die einfache Beziehung

$$\Theta_x - \Theta_y = 4\pi R^2 f \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

übergeht, heranzuziehen.

Das polare Trägheitsmoment in bezug auf M_0 ist

$$\Theta_0 = R \int_0^{2\pi} r^2 \, d\psi.$$

Unterscheidet man die konjugiert komplexe Größe von der Grundgröße durch horizontale Striche, so hat man $r^2 = z \cdot \bar{z}$ und

$$\Theta_0 = R \oint_K \left(\zeta + \frac{Rf}{\zeta} + \frac{c_2}{\zeta^2} + ..\right)\left(\bar{\zeta} + \frac{Rf}{\bar{\zeta}} + \frac{\bar{c}_2}{\bar{\zeta}^2} + ..\right)\frac{d\zeta}{i\zeta}$$

$$= R \oint_K \left(\zeta + \frac{Rf}{\zeta} + \frac{c_2}{\zeta^2} + ..\right)\left(\frac{R^2}{\zeta} + \frac{f\zeta}{R} + \frac{\bar{c}_2 \zeta^2}{R^4} + ..\right)\frac{d\zeta}{i\zeta}$$

Auswertung ergibt

$$\left.\begin{aligned} \Theta_0 &= 2\pi R\left[R^2 + f^2 + R^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|c_n|^2}{R^{2(n+1)}}\right] \\ &= 2\pi R^3\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|c_n|^2}{R^{2(n+1)}}\right] \end{aligned}\right\} \quad (5).$$

Damit hat zunächst die immer < 1 ausfallende Summe

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|c_n|^2}{R^{2(n+1)}} \quad \text{oder} \quad S_1 R^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|c_n|^2}{R^{2n}}$$

eine anschauliche Deutung erfahren. Da nämlich $\frac{\Theta_0}{2\pi R} = k_0^2$ im Sinne obiger Annahme das Quadrat des Trägheitsradius ist, so ist die Summe $S \cdot R^2 = k_0^2 - R^2$ also gleich dem Ueberschluß des Quadrats des polaren Trägheitsradius für die Profilbelegung gegenüber dem entsprechenden Quadrat für die Kreisbelegung.

Mit (4) erhalten wir für Θ_x und Θ_y die Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} \Theta_x &= \pi R\left[(R+f)^2 + R^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|c_n|^2}{R^{2(n+1)}}\right] \\ \Theta_y &= \pi R\left[(R-f)^2 + R^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|c_n|^2}{R^{2(n+1)}}\right] \end{aligned}\right\} \quad (6).$$

Die Form der Trägheitsellipse hängt, wie man sieht, wesentlich ab von der Größe von f.

Ist $f = 0$, so geht die Ellipse in einen Kreis über. Man sieht ferner, daß die (Culmannschen) Zentralellipsen aller Profile mit denselben Invarianten R und f eine konfokale Schar bilden, deren Brennpunkte von M_0 den Abstand $\sqrt{2Rf}$ haben.

4. Besondere Fälle. Ist das Profil ein Joukowskisches, so haben wir statt (2)

$$z = \zeta + \frac{Rf}{\zeta + \zeta_0} = \zeta + \frac{Rf}{\zeta} - \frac{\zeta_0 Rf}{\zeta^2} + \frac{\zeta_0^2 Rf}{\zeta^3} \quad (7),$$

wo zwischen $\zeta_0 = c \cdot e^{i\chi}$, R, f und dem Wölbungswinkel φ (Winkel zwischen der ersten und zweiten Profilachse) die Beziehungen bestehen

$$\left.\begin{aligned} c^2 &= R^2 + Rf - \sqrt{Rf}\cos\varphi \\ &= R^2 - Rf + 2c\sqrt{Rf}\cos\chi \\ c &= \frac{R\sin\varphi}{\sin\chi}, \quad f = \frac{R\sin^2(\chi - \varphi)}{\sin^2\chi} \end{aligned}\right\} \quad (8).$$

Man erhält dann aus (6) die folgenden Werte

$$\left.\begin{aligned} \Theta_x &= \pi R\left[(R+f)^2 + f^2 \frac{c^2}{R^2 - c^2}\right] \\ \Theta_y &= \pi R\left[(R-f)^2 + f^2 \frac{c^2}{R^2 - c^2}\right] \end{aligned}\right\} \quad (9).$$

Wird z. B. $\zeta_0 = iR\sin\varphi$, so ist $f = R\cos^2\varphi$. Das Profil geht in einen doppelberandeten Kreisbogen über, und es wird

$$\Theta_x = \pi R^3 (1 + 3\cos^2\varphi), \quad \Theta_y = \pi R^3 \sin^2\varphi.$$

Wird $\zeta_0 = 0$, so erhalten wir als Profil eine Ellipse mit den Achsen $R + f$ und $R - f$ mit

$$\Theta_x = \pi R (R + f)^2, \quad \Theta_y = \pi R (R - f)^2.$$

Unter allen Profilen mit denselben Werten R und f hat also die Ellipse die kleinsten Trägheitsmomente.

Wenn $R = f$ wird, so geht das Profil über in die doppelt gezählte Strecke mit den Endpunkten $+2R$, $-2R$ und es wird

$$\Theta_x = 2\pi R^3, \quad \Theta_y = 0.$$

Ist endlich $f = 0$, so geht die Abbildung in die Identität über mit

$$\Theta_x = \Theta_y = \pi R^3,$$

wie zu erwarten war. Der Kreis hat das kleinste Θ_x und das größte Θ_y. 294

Hannover-Linden. W. Müller.

BUCHBESPRECHUNGEN

Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften. Herausgegeben von der Schriftleitung der »Naturwissenschaften«. Erster Band. Mit 35 Abbildungen. Verlag von Julius Springer, Berlin 1922. 403 S.

Die Schriftleitung der »Naturwissenschaften« beabsichtigt, alljährlich einen Sammelband erscheinen zu lassen, in dem in zusammenfassenden Darstellungen über die wichtigsten Fortschritte des letzten Jahres in einzelnen Zweigen der Physik und den ihr benachbarten Wissensgebieten berichtet werden soll. Die Aufsätze des vorliegenden ersten Bandes dieser »Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften«, die teilweise etwas weiter zurückgreifen, entsprechen fast durchweg dem Programm des Herausgebers. Sie sollen so gehalten sein, daß auch der den Detailfragen eines bestimmten Spezialgebietes Fernstehende sich einen Ueberblick über den gegenwärtigen Stand der aktuellsten Fragen exakter Naturforschung verschaffen kann.

An erster Stelle berichtet R. Prager-Neubabelsberg über die Fortschritte der Astronomie im Jahre 1921. Dabei werden allerdings alle jene Fragen ausgeschlossen, die im Zusammenhang mit den spektroskopischen

und photometrischen Arbeiten der Astrophysik stehen. (Ihre Behandlung ist dem demnächst erscheinenden zweiten Bande vorbehalten.) Aber es bleibt in dem Bericht noch so viel Neues über die Erweiterung unserer Erkenntnis des Himmelsgewölbes, die Entdeckung neuer Kometen und Planeten, über die Arbeiten, die die Prüfung der Relativitätstheorie zum Gegenstand haben, über die Untersuchung der Bewegungen im Sonnensystem und in der Fixsternwelt, endlich über die Fortschritte in der astronomischen Beobachtungstechnik, insbesondere die wunderbare Michelsonsche Interferometermethode zur Messung der Doppelsterndistanzen und des Winkeldurchmessers der Fixsterne, zu sagen, daß bei der Fülle des Stoffes der Verfasser in vielem die allerknappste Ausdrucksform zu finden bemüht sein mußte. Von viel prinzipiellerem Standpunkt geht der Bericht von H. Thirring-Wien über Relativitätstheorie aus, in dem scharf gesondert und übersichtlich einerseits für die spezielle, andererseits für die allgemeine Relativität zunächst die Idee der Theorie und ihre Folgerungen bezüglich Raum und Zeit, hierauf die physikalischen resp. astronomischen Konsequenzen besprochen werden.

Dem Artikel über »Statistische Mechanik« merkt man gleich an, daß seinem Verfasser, P. Hertz, in erster Linie die philosophischen Fragen am Herzen liegen. Die begrifflichen Schwierigkeiten, die die statistische Mechanik bietet, finden ausdrückliche Betonung, die Theorien der Zeitgesamtheit, der virtuellen Gesamtheit und der Raumgesamtheit (einschließlich der Einstein-Ornsteinschen Erweiterung des Boltzmannschen Prinzips) werden gesondert und in ihrem Zusammenhange dargelegt. Der Verfasser erwähnt leider nicht die — der seinigen entgegengesetzte — Auffassung, die die Statistische Mechanik im wesentlichen als einen Zweig der Wahrscheinlichkeitsrechnung betrachtet wissen will, während sie diese selbst als eine Naturwissenschaft auffaßt, die lediglich die Gesetze angibt, wie aus gegebenen Ausgangswahrscheinlichkeiten gewisse resultierende Wahrscheinlichkeiten ermittelt werden können. Dem Physiker aber dürfte diese Betrachtungsweise vielleicht leichter über den scheinbaren Widerspruch zwischen Thermodynamik und Mechanik hinweghelfen, als die sehr tiefgreifenden Ueberlegungen des Verfassers, die schließlich auch in der Erkenntnis gipfeln, daß es hier erst ontologischer Bestimmungsstücke bedarf, um scheinbar allgemeinen Naturgesetzen ihre besondere Form zu geben.

Der folgende Bericht von R. Grammel »Neuere Untersuchungen über kritische Zustände rasch umlaufender Wellen« führt in eine ganz andere, dem Ingenieur wohl vertraute Gedankenwelt. Es werden zunächst die Ansätze formuliert, die zur Ermittelung der kritischen Drehzahlen einer ursprünglich geraden, an einem oder zwei Enden festgelagerten, mit Laufradscheiben besetzten Welle von kreisförmigem Querschnitt führen, der Drehzahlen nämlich, bei denen die Welle zu schleudern beginnt. Für die Lösung der hier auftretenden Determinantengleichung werden vier Näherungsverfahren auseinandergesetzt, die zu den Lösungen erster Ordnung (mit der geringsten Anzahl von Knotenpunkten der schwingenden Wellenachse) führen, und in ihrer praktischen Brauchbarkeit vergleichend diskutiert. Es folgt die Besprechung der Näherungsverfahren für die Lösungen höherer Ordnung und für vielfach gelagerte Wellen; auch die Ergebnisse im Falle nicht kreisförmigen Querschnitts werden behandelt. Alle diese Untersuchungen beziehen sich auf lotrecht stehende Wellen, d. h. es wird vom Einfluß der Schwerkraft abgesehen. In einem weiteren Abschnitt behandelt Verfasser die Arbeiten über die sogenannten kritischen Zustände zweiter Art, die bei wagrechten Wellen unter dem Einfluß der Schwere auftreten. Schließlich findet noch die praktisch wichtige Frage der Gefährlichkeit der Zustände erster und zweiter Art eine kurze Erörterung.

In das Gebiet der Physikalischen Chemie leitet ein fast 40 Seiten langer Aufsatz von A. Eucken über den Nernstschen Wärmesatz hinüber. Dann schiebt sich ein Bericht über »Wärmestrahlung« von F. Henning ein, der die neuesten Ergebnisse der Ultrarotforschung, in deren Mittelpunkt wieder die klassischen Arbeiten des jüngst verstorbenen H. Rubens stehen, den aktuellen Stand der Fragen der Temperaturmessung und der Bestimmung der Strahlungskonstanten behandelt. Verfasser steht auf dem Standpunkt, daß die von Nernst aufgerollte Frage nach der experimentellen Bestätigung des Planckschen Strahlungsgesetzes auch durch die glänzende Uebereinstimmung der letzten Messungen von Rubens und Michel und die zahlreich vorliegenden theoretischen Gründe noch nicht endgültig zu Plancks Gunsten entschieden sei. Eingehend bespricht A. Coehn das Kontaktpotential, M. Bodenstein berichtet in zwei Artikeln über Chemische Kinetik und Photochemie, aus denen wieder einmal hervorgeht, wie eng sich heute überall die Arbeit des Chemikers mit der des Physikers berühren muß, um zu dem Problem der Konstitution der Materie vorzudringen. Man kann bereits, dank der Grundlage der Einsteinschen Gesetze und der Experimente von J. Franck und seiner Schule über Elektronenstoß, in einfachen Fällen fast »Quant um Quant« den Verlauf chemischer Prozesse unter Einfluß von Lichtenergie verfolgen. In gleicher Richtung zieht F. Auerbach den Schluß, daß die »Neuen Wandlungen der Theorie der elektrolytischen Dissoziation« »einen Fortschritt auf dem Wege zu einer einheitlichen Zurückführung aller chemischen Erscheinungen auf elektrische Kräfte« bedeuten.

Ueber den gegenwärtigen Stand der »Röntgenspektroskopie« berichtet ihr Begründer M. v. Laue, und von dem gleichen Gebiet geht A. Johnsen aus, um, was die Neuerungen der Methodik betrifft, über die Fortschritte im Bereiche der Kristallstruktur zu referieren. Reine Physik ist

auch fast ausschließlich, was der Kristallograph hier über Statik und Dynamik der Kristallgitter mitzuteilen hat. Bei den Fragen der Symmetrik hat auch der Mathematiker mitzureden und ihm dürfte das letzte und gewichtigste Wort vorbehalten bleiben, wenn es gilt, das, was der Atomtheoretiker heute über bewegte Systeme im Kristallverband mehr ahnt als weiß, quantitativ zu erfassen.

In seinem Artikel »Fortschritte der Atom- und Spektraltheorie« hat G. Wentzel im wesentlichen die neuesten Erkenntnisse Bohrs über den inneren Aufbau der Elemente zusammengestellt und erläutert, über den heutigen Stand der »Theorie der Bandenspektren« (Spektren der Gasmoleküle) berichtet A. Krazer kurz, klar und übersichtlich. Daran reihen sich die interessanten Ausführungen von P. Pringsheim über »Lichtelektrische Wirkung und Photoluminiszenz« (Resonanz- und Fluoreszenzstrahlung). Vom Standpunkte des Radiologen bespricht schließlich F. Paneth das Periodische System der Elemente. Bekanntlich ist es in den letzten Jahren Rutherford, Aston und vielen anderen gelungen, mit dem Rüstzeug der Radioaktivität weit vorzudringen, um über den einheitlichen Aufbau der Materie, über Reihenfolge und Ganzzahligkeit der Atomgewichte, über die Anzahl der existierenden Elemente und die Eigenschaften der noch unentdeckten Aufklärung zu schaffen. Und dem raffinierten experimentellen Werkzeug gesellt sich auch hier wieder die Theorie Bohrs als Leitstern und Führer. Wahrlich, sieht man das ganze in diesem und den vorhergehenden Kapiteln gesammelte Material, wie sich Glied an Glied, Zahl an Zahl fügt, um ein lückenloses Gebäude zu schaffen, wie an vielen Stellen der Experimentator nicht zu entdecken, sondern bloß zu bestätigen braucht, was man ohnedies schon weiß (man vergl. auch z. B. die in dem Bande noch nicht behandelte Auffindung des Elementes 72 (Hafnium) von v. Hevesy und Coster), dann begreift man, daß die Atomforscher in Niels Bohr ihren Hort und ihr Heil sehen.

Das vorliegende Buch ist für den exakten Naturwissenschaftler heute eine bildende und erfreuliche Lektüre, für den Historiker der Wissenschaft mag die ganze Sammlung einmal eine Fundgrube bilden für die Erkenntnis der Interessen, Anschauungen und Methoden unserer Zeit. Für den nächsten und die folgenden Bände aber wünschen wir dem verdienstvollen Herausgeber A. Berliner eine gleichwertige Schar von Mitarbeitern und eine gleiche Fülle von neuem und wissenswertem Material.

Berlin. G. Laski. 362

Dr.-Ing. THEODOR **PÖSCHL,** o. ö. Professor an der Deutschen Technischen Hochschule in Prag. **Lehrbuch der Technischen Mechanik für Ingenieure und Studierende. Zum Gebrauche bei Vorlesungen an Technischen Hochschulen und zum Selbststudium. Mit 206 Abbildungen. Verlag von Julius Springer, Berlin 1923. VI + 263. Geh. 6 ℳ.**

Der Verfasser selbst kennzeichnet sein Buch in folgender Weise: »Es will in knapper Form unter Vermeidung alles irgend Entbehrlichen und unter fortgesetzter Bezugnahme auf die Anwendungen die einfachsten und wichtigsten Lehren der Mechanik in einem Umfange darbieten, wie sie (ungefähr) von den Studierenden unserer technischen Hochschulen verlangt werden. Auf die axiomatische Begründung des Gegenstandes ist dabei bewußt vollständig verzichtet worden.« »Große Sorgfalt wurde auf die genaue Formulierung der Lehrsätze und Angabe ihrer Geltungsbereiche angewendet.« »Was der Ingenieur von einer Mechanik, die ihm von Nutzen sein soll, verlangt, sind Regeln und Anweisungen, die ihm zeigen, wie er im einzelnen Falle vorzugehen hat: mit solchen ist in diesem Buche nicht gespart worden.« »In dem Buche sind ferner die rechnerischen und zeichnerischen Methoden unter Angabe ihrer Anwendungsbereiche nebeneinander behandelt worden.« »Die Lehren der Mechanik können am einfachsten und natürlichsten in die Gesamtheit unseres Wissens eingeordnet werden, wenn man sich auf den Boden einer vernünftigen, realistischen Weltansicht stellt.«

Ueber diese Sätze selbst soll nicht gestritten werden; daß er sein Ziel erreicht hat, kann im ganzen dem Verfasser zugestanden werden. Von einigen Mängeln abgesehen, dürfte das Buch brauchbar sein und vielleicht sogar von Ingenieuren gern gelesen werden, da es mit einem gesunden Gefühl für Mechanik sachverständig geschrieben ist und in der Tat eine Menge Anwendungen, viele und gute Zeichnungen und die gewünschten Anweisungen und Regeln enthält.

Im einzelnen bedarf es aber doch einiger kritischer Bemerkungen. Ueber die auf 12 Seiten abgemachten Grundbegriffe soll mit dem Verfasser gemäß seinem ersten oben zitierten Satze nicht gerechtet werden. Nur glaube ich, daß die Definition der Kraft als Ursache einer Bewegung nun doch so veraltet ist, daß hier schon nicht mehr ein vernünftiger, sondern ein ganz naiver Realismus vorliegt. Nach den Grundbegriffen kommen 8 Seiten Vektorrechnung. Hier kann ich einige stärkere Bedenken nicht unterdrücken. Es werden 1. freie, 2. an ihre Träger (Graden) gebundene und 3. angeheftete Vektoren oder Feldvektoren in der üblichen Weise unterschieden und dabei als Beispiel zur ersten Gruppe das Kraftpaar, als Beispiel zur zweiten Gruppe die Kraft genannt und dann seltsamerweise als Beispiel zur dritten Gruppe die Schwerkraft. Ja, ist denn das keine Kraft? Und die beiden ersten Zuordnungen sind doch nur für den starren Körper richtig, wovon aber an dieser Stelle nichts steht. Da erfahrungsgemäß die Studenten ohnehin dazu neigen, den Gesetzen des starren Körpers einen zu weiten Spielraum einzuräumen, muß diese Ungenauigkeit geradezu gefährlich genannt werden. Ich

möchte mich aber überhaupt gegen diese, allerdings weitverbreitete und breitgetretene Unterscheidung in der eigentlichen Vektorrechnung wenden. Diese sollte nur freie Vektoren kennen, sowie die Arithmetik nur freie Zahlen kennt. Weil eine Temperatur einem bestimmten Orte zukommt, fällt es doch niemanden ein, freie und gebundene Zahlen zu unterscheiden. Ob Summenbildungen Sinn haben, ist keine Frage der Mathematik, sondern eine solche der Physik und hängt jedenfalls nicht davon ab, ob die Größen gebunden oder frei sind. Was aber der Verfasser auf Seite 14 zu meinen scheint. Die Kraft ist, wie jede physikalische Größe stets an einen Ort (und an eine Zeit) gebunden; daß sie am starren Körper in der Angriffsgraden verschoben werden kann, ist eine ganz besondere Eigenschaft des starren Körpers und sollte dort erheblich breiter und wuchtiger dargestellt werden als es der Verfasser (Seite 30) für nötig hält. Seite 18 wird bei Einführung des Momentes um eine Axe zunächst gar nicht vom Zeichen gesprochen; trotzdem ist auf einmal in der Formel ein bestimmtes Zeichen da! Seite 19 kommt dann noch eine diesbezügliche Verabredung, die doch nun nach Aufstellung der Formeln nicht mehr getroffen werden kann.

Nach den 20 Seiten der Einleitung folgt als erster Teil die Statik starrer Körper, die auf 77 Seiten eine gute Auswahl bietet, einschließlich der Elemente der Fachwerkstatik. Nur herrscht hier wieder eine grundsätzliche Unklarheit. Seite 36 wird die Summation der Momente ebener Kräfte einfach als etwas selbstverständliches ausgesprochen, während die Berechtigung hierzu bis dahin nur für Kräfte bewiesen ist, die durch einen Punkt gehen (Seite 20). Und bei der Zusammensetzung räumlicher Kräfte heißt es Seite 62: »Es ist unmittelbar klar, daß zwei gleiche Kräftepaare, in parallelen Ebenen auf den starren Körper wirkend, als identisch anzusehen sind«. Ich möchte denn doch wissen, wieviel Anfängern das so ganz klar ist! Weitere Bemerkungen sind hier nicht zu machen, es sei gerne anerkannt, daß die Darstellung der Reibungstheorie klar ist, was man nicht von allen Büchern sagen kann.

Der zweite Teil bringt auf 73 Seiten eine recht befriedigende Darstellung der Kinematik des starren Körpers, die auch die einfachen Punktbewegungen schon vom dynamischen Standpunkt aus behandelt. Die Dynamik des starren Körpers enthält dann der dritte und letzte Teil. Er beginnt, wohl ganz geschickt, mit den Begriffen: Arbeit, Leistung, Wucht, die dem Ingenieur besonders lieb sind. Merkwürdig ist, daß von dem Integral der Arbeit gesagt wird, es habe nur dann einen Sinn, wenn es vom Wege unabhängig ist. Aber das meint doch wohl der Verfasser selbst nicht so! Nun kommt das Prinzip der virtuellen Arbeiten. Das Prinzip selbst wird Seite 181 für den einzelnen starren Körper richtig ausgesprochen, wenn wohl auch noch hätte gesagt werden können, daß das Verschwinden der virtuellen Arbeiten auch eine hinreichende Gleichgewichtsbedingung ist. Aber Seite 180 steht, allerdings kleingedruckt, etwas recht Unverständliches über virtuelle Verschiebungen. Der zweite Beweisversuch Seite 182 ist mißglückt, da nicht gezeigt wird, daß die inneren Kräfte keine Arbeit leisten. Für allgemeinere Fälle als den einzelnen starren Körper folgt die Formulierung auf Seite 182/83. Manchmal nur wie hier behandelt der Verfasser wichtige Dinge mit einer Eile, die das Verständnis ziemlich erschwert. Die Anwendungen sind gut, wenn auch alle bekannt. Einem guten Kapitel über Trägheitsmomente folgt dann das D'Alembert-sche Prinzip. Es wird richtig formuliert, allerdings nur für den einzelnen starren Körper; die Folge dieser Einschränkung ist dann die, daß in der Anwendung auf Seite 201 die Leistungsfähigkeit des Prinzips nicht voll zur Geltung kommt. Im Grunde genommen wird das dort behandelte Beispiel mit ganz elementaren Methoden behandelt und der Leser wird sich fragen: was habe ich denn eigentlich Neues gelernt? Die Begründung des Prinzips ist aber auch für den einfachen vorliegenden Fall unvollständig, es wird nur die Hälfte bewiesen. Formelmäßig steht dann zwar Seite 200 das vollständige Ergebnis, d. h. Schwerpunkts- und Momentensatz, aber der Beweis des zweiten Satzes fehlt. Den folgenden Kapiteln, die weitere Ausführungen zur Dynamik bringen und, allerdings nur bei einem Freiheitsgrad, bis zu den Lagrangeschen Gleichungen aufsteigen, kann man wieder zustimmen. Sie bringen gerade das Wichtigste in konkreter Form. Die Schwungradberechnung ist ziemlich ausführlich behandelt. Seite 230 kommt der Verfasser noch einmal auf das D'Alembertsche Prinzip zu sprechen und formuliert es allgemeiner, scheinbar ganz allgemein; hebt diese Allgemeinheit aber wieder dadurch auf, daß er sagt, man müsse die Auflagerdrucke zu den eingeprägten Kräften hinzunehmen. Das ist nicht nötig, wenn die virtuellen Verschiebungen — es handelt sich hier um die Verknüpfung des Prinzips von D'Alembert mit dem der virtuellen Arbeiten — die Stützungen respektieren. Zwar entsteht kein Fehler, wenn man nach dem Rezept des Verfassers verfährt, da die Stützkräfte, wenigstens bei ruhenden Stützen, keine Arbeit leisten, aber der Witz der Sache geht wieder verloren. Vor allem wird in diesen prinzipiellen Dingen keine Klarheit erzeugt. Mit Axiomatik hat das alles nichts zu tun, der Verfasser genügt hier seinem eigenen Anspruch Nr. 2 nicht. Die folgenden konkreten Anwendungen von Schwerpunkt- und Momentensatz sind dann wieder gut; ebenso kann man mit dem dann folgenden Kapitel über Kreiselwirkung einverstanden sein. Es folgen noch Kapitel über den Stoß und die mechanische Aehnlichkeit mit vielen guten Beispielen.

Ich habe das Buch ziemlich ausführlich besprochen und recht offen meine Meinung gesagt, weil ich glaube, daß es noch recht

gut werden kann, wenn der Verfasser bei einer Neuauflage die prinzipiellen Teile sorgfältiger behandelt. Schwierigkeiten sind ja nicht mehr zu überwinden, da alles in der Literatur vorliegt.

Die Zeichnungen und ihre Ausführung sowie die ganze Ausstattung des Buches sind mustergültig.

Berlin, Oktober 1923. Hamel. 354

Dr. WILHELM **HORT,** Oberingenieur bei der Turbinenfabrik der AEG, Privatdozent an der Technischen Hochschule in Berlin. **Technische Schwingungslehre.** Ein Handbuch für Ingenieure, Physiker und Mathematiker bei der Untersuchung der in der Technik angewendeten periodischen Vorgänge. Zweite, völlig umgearbeitete Auflage. Mit 423 Textabbildungen. Verlag von Julius Springer, Berlin 1922. 828 S. Geb. 20 *M*.

Gegenüber der ersten Auflage von 1910 erscheint die Technische Schwingungslehre von W. Hort nunmehr in bedeutend erweiterter Form. Es ist ein Handbuch, das fast alle für den Ingenieur in Betracht kommenden mathematischen Methoden der Behandlung von Schwingungsproblemen enthält. Die Darstellung geschieht zumeist an Hand von praktisch vorkommenden Aufgaben, und sie gewinnt dadurch eine den Techniker ansprechende Form. Hier und da hat man freilich fast den Eindruck, daß in der Wiedergabe von Beispielen des Guten etwas viel getan wird, z. B. bei den Instrumenten zur Aufzeichnung von Schwingungen.

Der besondere Reiz des Werkes für den Ingenieur und wohl auch sein Hauptwert ist darin zu erblicken, daß es die Probleme so zu nehmen versucht, wie sie die Wirklichkeit darbietet. Viele Versuche von Ingenieuren, wirkliche Vorgänge theoretisch zu behandeln, sind daran gescheitert, daß sie den Ansatz auf ein bestimmtes mathematisches Lösungsverfahren zugeschnitten hatten, weil die Behandlung des ursprünglichen Ansatzes anscheinend »unüberwindliche mathematische Schwierigkeiten« bot. In solchen Fällen wird sich das Hortsche Buch manchem Benutzer künftig als nützlicher Ratgeber erweisen und ihn darüber aufklären, daß die mathematischen Schwierigkeiten in seinem Fall vielleicht gar nicht so groß sind, wenn man nur das dafür geeignete Lösungsverfahren anwendet. In diesem Zusammenhang möchte ich vor allem nennen die Theorie der nichtharmonischen Schwingungen und die Riemannsche Theorie der Luftwellen endlicher Schwingungsweite, die neuerdings durch Salinger in eleganter Weise auf die Wellenausbreitung in elektrischen Krarupkabeln angewandt worden ist.

Die elektromagnetischen Schwingungen und Wellen haben in der neuen Auflage ebenfalls die ihnen gebührende Berücksichtigung erfahren. Eine große Zahl der den Elektrotechniker besonders interessierenden Aufgaben ist behandelt. Ich nenne darunter z. B. die mechanisch-elektrischen Schwingungen von Maschinen, den elektrischen Schallsender und Schallempfänger (Telephon), die Erzeugung von Schwingungen durch den Lichtbogen und die Elektronenröhre, die Theorie der homogenen Leitungen und der Kettenleiter, die Antennenschwingungen und die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen.

Eine Methode von großer Tragweite und Fruchtbarkeit, die sich neuerdings in der technischen Literatur einzubürgern beginnt, ist in dem Buch leider nicht berücksichtigt: Das Heavisidesche Verfahren zur Berechnung der Schwingungen, die beim Anstoß entstehen. Man möchte wünschen, daß auch dieses so elegante und bequeme Verfahren in der nächsten Auflage seinen Platz findet.

Der Verfasser hat es verstanden, die Darstellung des für den Techniker etwas spröden mathematischen Stoffes lebendig zu gestalten und das Interesse des Lesers zu fesseln, dadurch, daß er reichlich Zahlenbeispiele einschaltet, die betrachteten Objekte durch Abbildungen und die gewonnenen Ergebnisse durch Kurven veranschaulicht, vielfach auch die mit Instrumenten aufgenommenen Schwingungsbilder (z. B. Seismogramme, Oszillogramme, Schlierenbilder und dergl.) wiedergibt. Zu jedem Gegenstand ist die einschlägige Literatur fast lückenlos angegeben.

Dem mit viel Liebe und großer Sorgfalt geschriebenen Werk ist im Interesse der deutschen Technik ein voller Erfolg zu wünschen.

K. W. Wagner. 283

WALTHER **KAUFMANN,** Dr.-Ing., o. Pro- an der Technischen Hochschule zu Hannover. **Statik.** Mit 385 Textabbildungen. Handbibliothek für Bauingenieure. Herausgegeben von Robert Otzen. IV. Teil. Brücken- und Ingenieurhochbau. 1. Band. Verlag von Julius Springer, Berlin 1923. VII + 350 S.

Von den in der deutschen Literatur vorhandenen Lehrbüchern der Statik unterscheidet sich das vorliegende Werk durch die Kürze der Darstellung, bei der aber die Berechnungsmethoden für statisch bestimmte und statisch unbestimmte Tragwerke mit einer für praktische Bedürfnisse hinreichenden Ausführlichkeit behandelt sind.

Zunächst werden die allgemeinen Grundlagen erklärt, die Gleichgewichtsbedingungen des starren Körpers und das Prinzip der virtuellen Verschiebungen, die Kennzeichnung von Tragwerken und einige wichtige Begriffe der Elastizitätstheorie. — Dann kommen in zwei Abschnitten die statisch bestimmten vollwandigen Systeme (der einfache Balken, Gerberträger, Dreigelenkbogen) und die statisch bestimmten ebenen und räumlichen Fachwerke zur Behandlung. — Der vierte Abschnitt befaßt sich mit den elastischen Formänderungen. Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen wird auf Fachwerke und massive Tragwerke angewendet, es folgen die Sätze von der Gegenseitigkeit der elastischen Formänderungen, der Satz Castiglianos vom Differentialquotienten der Formänderungsarbeit, die Biegungs-

linien von Fachwerken und massiven Traggebilden, die Verschiebungspläne nach Williot. — Nachdem so alle Voraussetzungen dazu entwickelt sind, werden statisch unbestimmte Systeme berechnet. Die Elastizitätsgleichungen werden in der Form von Maxwell-Mohr und in der Ausdrucksweise Müller-Breslaus hergeleitet, Auflösungsmethoden der Gleichungen werden gezeigt und schließlich wird ein Verfahren von S. Müller angegeben, nach dem man Gleichungen mit nur je einer Unbekannten erhält. — Im letzten Abschnitt, der seinem Umfang nach ungefähr ein Drittel des Buches bildet, sind einige statisch unbestimmte Tragwerke einer genaueren Betrachtung unterzogen und zwar durchlaufende Träger auf festen und elastischen Stützen sowie auf biegungsfest mit ihnen verbundenen Stielen, ferner Rahmen und Bogenträger.

Daß bei dem kleinen Umfang der »Statik« und auch bei ihrem Zweck im Rahmen der Handbibliothek für Bauingenieure, feinere Untersuchungen beiseite gelassen sind, ist wohl selbstverständlich. Das Buch ist leicht faßlich geschrieben und wird dem Studierenden und dem praktischen Ingenieur sicher ein guter Leitfaden sein. Ratzersdorfer. 290

NACHRICHTEN

Felix Klein. Anläßlich seines 75. Geburtstages am 25. April ds. Js. ist Felix Klein, dessen Lebenswerk an anderer Stelle dieses Heftes gewürdigt wird, von der Deutschen Mathematiker-Vereinigung und von der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik zum Ehrenmitglied ernannt worden.

Internationaler Kongreß für angewandte Mechanik in Delft. Zu den bereits in Heft 1 angekündigten Vorträgen sind noch folgende hinzugekommen.

Zusammenfassende Berichte für die allgemeinen Sitzungen.

J. Czochralski-Frankfurt a/M.: Die Grundlagen der Verfestigungsvorgänge.

Vorträge in Sektion I.

J. Droste-Leiden: Eine Bemerkung zu den Variationsprinzipien der Mechanik und der Physik.

A. N. Kriloff-Moskau: On the Approximate Integration of Differential Equations by a Numerical Process.

H. Föttinger-Danzig-Zoppot: Ueber Maschinen zur Berechnung von Wirbel- und Quellfunktionen.

R. Courant-Göttingen: Ueber das Ritzsche Verfahren zur Lösung von Randwertaufgaben.

Vorträge in Sektion II.

Jos. Geiger-Augsburg: Meßgeräte und Verfahren zur Untersuchung mechanischer, technisch besonders wichtiger Schwingungsvorgänge.

Die Verteilung der Vorträge auf die Verhandlungstage ist folgende:

23. April (Allgemeine Sitzung) vormittags: Biezeno — Coker — Prandtl.
nachmittags: Griffith — Czochralski.

24. April vormittags: Sektion I. Alt — Droste — Tzenoff — v. Mises — Frank.
Sektion II. Wyss — Schwerin — Southwell — Grammel — Hort — Terzaghi — Reissner.
Sektion III. Zeilon — Brodetsky — Solberg — Bjerknes — Friedmann.
Sektion I gemeinschaftlich mit Sektion III. Rehbock.

25. April (Allgemeine Sitzung) vormittags: Taylor — v. Kármán — Burgers.
nachmittags: Levi-Civita — Hogner — Napier Shaw.

26. April vormittags: Sektion I. Berlage — Kriloff — Föttinger — Courant — Vening Meinesz — Pfeiffer.
Sektion II. vormittags: Masing — Haigh — Hencky — Nádai — Schmid — Weißenberg — Geiger.
Sektion III. vormittags: Marchis — Hahn — Witoszynski — Koning — Kempf — v. Baumhauer.
Gemeinschaftlich Sektion I, II und III. Geiger, Vorführung von Schwingungsmessern.

Die große Zahl der bis zum 1. April eingetroffenen Anmeldungen läßt einen überaus starken Besuch des Kongresses erwarten.

Der **Ausschuß für graphische Rechenverfahren in Berlin** veranstaltet von jetzt an am ersten Freitag eines jeden Monats, 5 Uhr nachmittags, in der Geschäftsstelle Kurfürstendamm 193/94, Zimmer 523 eine Zusammenkunft der Mitglieder. 407

Berichtigung.

Auf der dem Heft 1 dieses Jahrgangs beigegebenen Tafel zu Burmester: »Geometrische Untersuchung der Theorie der Bewegung des Grundwassers im Gerölle und der Wasserfilterung durch Sand« soll die Aufschrift rechts oben richtig lauten: »Band 4, Heft 1« statt »Band 3, Heft 6«.

(Redaktionsschluß 5. April 1924.)

Verantwortlich: für die Schriftleitung Professor Dr. von Mises, Berlin W 30, Neue Winterfeldtstraße 43;
für den Anzeigenteil Fritz Noack, Berlin-Niederschönhausen.
VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin. — Druck von A. W. Schade, Berlin N 39.